

**Ai Tusi Fatimah, S.Pd., M.Si.
Dr. Adang Effendi, S.T., M.Pd.
Ida Nuraida, S.Pd., M.Pd.
Angra Meta Ruswana, S.Pd., M.Pd.**

PANDUAN PRAKTIKUM ***MAPLE***

ISBN 978-602-5942-23-5



Ai Tusi Fatimah, S.Pd., M.Si.
Dr. Adang Effendi, S.T., M.Pd.
Ida Nuraida, S.Pd., M.Pd.
Angra Meta Ruswana, S,Pd., M.Pd.

PANDUAN PRAKTIKUM
MAPLE



PANDUAN PRAKTIKUM *MAPLE*

Ciamis: Tsaqiva Publishing

iv + 50 hal; 15 cm × 21 cm

ISBN : 978-602-5942-23-5

Edisi I

Cetakan ke-1 (September 2018)

- Penulis : Ai Tusi Fatimah, S.Pd., M.Si.
Dr. Adang Effendi, S.T., M.Pd.
Ida Nuraida, S.Pd., M.Pd.
Angra Meta Ruswana, S.Pd., M.Pd.
- Desain Sampul : Tim Tsaqiva Publishing
- Penata Letak Isi : Tim Tsaqiva Publishing
- Penerbit : CV Tsaqiva Publishing



Kantor Redaksi:

Jl. Kapten Murod Idrus, Ciamis, Jawa Barat

 www.tsaqiva-publishing.co.id

 tsaqiva.publishing@gmail.com

 Penerbit Tsaqiva

 Penerbit Tsaqiva

 0812 2080 369

@2018

Hak cipta dilindungi undang-undang.

*Dilarang memperbanyak sebagian atau keseluruhan isi buku ini
dalam bentuk apapun tanpa izin tertulis dari penerbit.*

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Wr. Wb.

Panduan Praktikum *Maple* ini disusun sebagai materi dalam praktikum yang diselenggarakan Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Galuh Ciamis. Materi dalam panduan ini merupakan dasar komputasi matematis dengan bantuan *Maple* untuk menunjang mahasiswa dalam kegiatan perkuliahan dan praktik pengalaman lapangan, serta mempersiapkan calon guru matematika yang terampil dalam memanfaatkan perangkat lunak matematika untuk kegiatan pembelajaran. Materi-materi pada panduan ini dapat mendukung beberapa mata kuliah terutama Mata Kuliah Kapita Selekta Matematika, Kalkulus, Matematika Terapan, dan Geometri Transformasi. Selain itu, panduan praktikum ini disajikan dengan pendekatan konten matematika tingkat sekolah menengah yang diharapkan akan sangat bermanfaat bagi mahasiswa ketika praktik pengalaman lapangan maupun sebagai guru matematika kelak.

Ucapan terima kasih tim penulis sampaikan kepada Ketua Laboratorium Matematika Program Studi Pendidikan Matematika atas kesempatan yang diberikan untuk mengembangkan buku panduan praktikum ini. Semoga buku ini bermanfaat bagi yang menggunakannya.

Wassalam Wr. Wb.

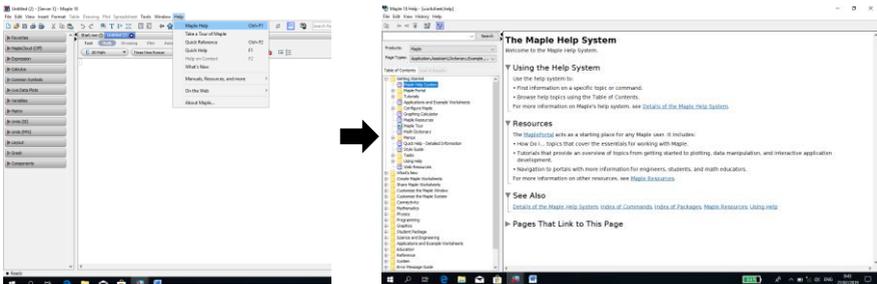
Ciamis, Agustus 2018

Tim Penyusun

DAFTAR ISI

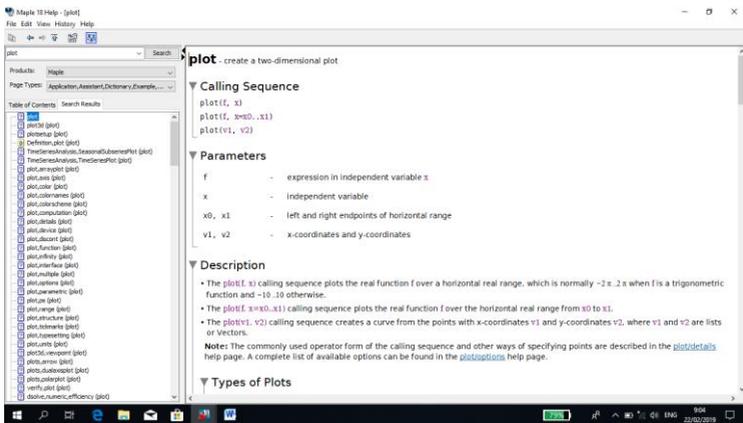
KATA PENGANTAR	iii
DAFTAR ISI	iv
1. MENGENAL <i>MAPLE</i>	1
2. OPERASI ARITMETIKA	5
3. ALJABAR	9
4. <i>FUNGSI</i>	12
5. LIMIT	16
6. TURUNAN	19
7. INTEGRAL	23
8. Matriks	28
9. IRISAN KERUCUT	31
10. GEOMETRI TRANSFORMASI	40
DAFTAR PUSTAKA	50

yang sudah tersedia. Kita dapat melihatnya pada halaman bantuan dengan memasukkan tanda tanya (?) yang diikuti dengan nama topik yang diperlukan pada bagian antarmuka. Alternatif lainnya dapat menggunakan *help* seperti pada Gambar 2 berikut.



Gambar 1.2. *Help* pada *Maple*

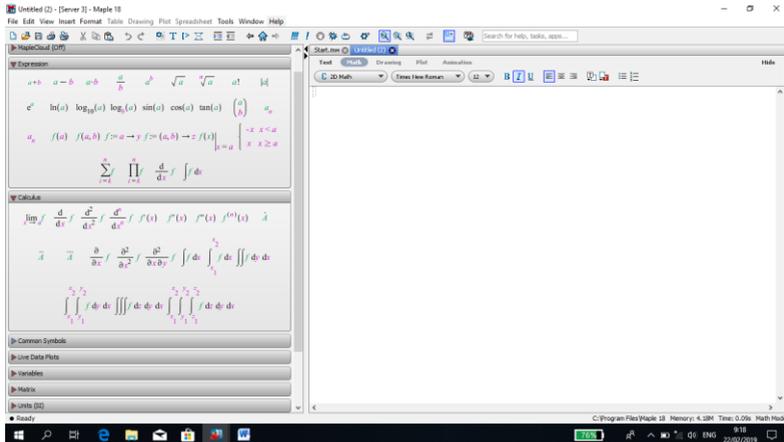
Pada bagian *search*, kita dapat menuliskan suatu kata yang dibutuhkan. Misalnya kita ingin mengetahui aturan menggambar pada dimensi dua. Kita masukkan kata *plot* pada bagian *search*. Hasilnya dapat dilihat pada Gambar 3 berikut.



Gambar 1.3. *Output plot* pada *help*

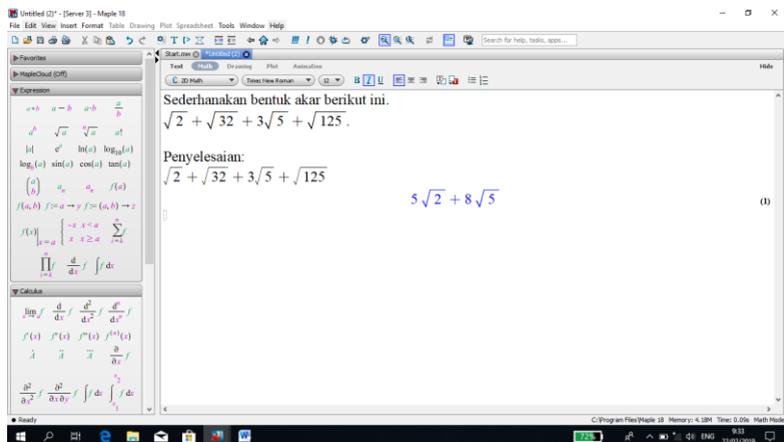
Karena *Maple* memiliki bahasa pemrograman yang khas, maka respons *Maple* sangat sensitif. Kesesuaian bahasa dan sintaks yang kita *input* sangat menentukan *output* yang akan dihasilkan oleh *Maple*. Oleh karena itu, peran *help* sangat dibutuhkan bagi Anda yang baru mengenal *Maple* atau tidak terbiasa menggunakannya.

Beragam alat (*tools*) dalam *Maple* dapat digunakan untuk mempermudah *input* yang diperlukan. Pada antarmuka *Maple* bagian kiri, kita dapat menggunakan berbagai ekspresi, simbol, dan sebagainya.



Gambar 1.4. Alat-alat dalam *Maple*

Kekhasan *Maple* selain sebagai alat bantu komputasi atau perhitungan juga mempunyai fungsi seperti dalam *microsoft word*. Kita dapat menulis sekaligus melakukan komputasi dalam antarmuka sekaligus.



Gambar 1.5. Menyederhanakan bentuk akar

Sebagai pendidik matematika, sudah menjadi hal yang biasa kita membuat bahan ajar dan berbagai soal untuk keperluan latihan atau ujian. Dengan sangat mudah dan praktis kita dapat memanfaatkan fungsi ganda *Maple* untuk keperluan tersebut. Sebagai contoh, misalkan kita akan membuat sebuah soal tentang menyederhanakan bentuk akar.

Pertama kita tuliskan soal dengan terlebih dahulu memilih “tekt”. Untuk ekspresi matematika, kita pilih “math”. Jawabannya dapat diketahui dengan menekan “enter”. Hasilnya dapat kita lihat seperti pada Gambar 5 berikut ini.

Eksplorasi dapat terus kita lakukan dengan bantuan *Maple* untuk berbagai keperluan baik pada bidang matematika khususnya pembelajaran matematika ataupun pengembangan ilmu matematika itu sendiri.

Berikut adalah daftar dari operasi aritmetika yang tersedia pada *Maple* dan berbagai bantuan lebih lanjut yang tersedia untuk setiap untuk operasi.

Tabel 2.1 Operasi Aritmetika

$a + b$	Penjumlahan
$a - b$	Pengurangan
$a * b$	Perkalian
$a ^ b$	Eksponensial
a / b	Pembagian
$n !$	Faktorial
$\text{abs}(n)$	Nilai mutlak
$\text{min}(a,b)$	Minimum
$\text{max}(a,b)$	Maksimum
$\text{isqrt}(n)$	Akar pangkat dua
$\text{iquo}(a,b)$	Hasil bagi
$\text{irem}(a,b)$	Sisa
$\text{igcd}(a,b)$	Pembagi bersama terbesar
$\text{ilcm}(a,b)$	Kelipatan persekutuan terkecil

Operasi *iquo*, *irem*, *isqrt*, *igcd*, dan *ilcm* hanya operasi integer.

Tool expression dapat membantu kita untuk menuliskan operasi aritmatika yang kita butuhkan.

Contoh 2.1

Hitunglah:

- $10 + 5$
- 10×2
- $\frac{10}{5}$
- 10^2
- $\frac{120!}{(100-10)!}$

Kita dapat menuliskan bilangan dan operasinya pada antarmuka *Maple* dan mengeksekusi hasilnya dengan cara menekan “enter”. Berikut hasil *output Maple*.

```
> 10+5
15
> 10·2
20
>  $\frac{10}{5}$ 
2
>  $10^2$ 
100
>  $\frac{120!}{(100 - 10)!}$ 
4502544950294398439021456223732927103905630936713134080000000
```

Contoh 2.2

Tentukan:

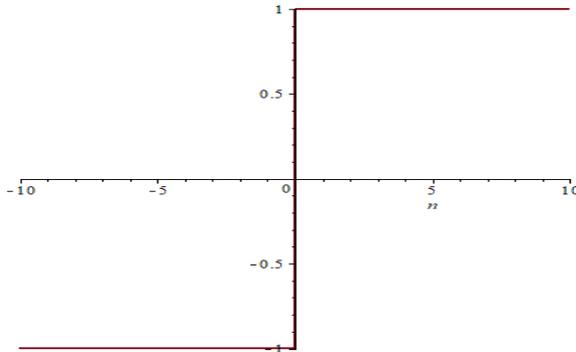
1. Kelipatan persekutuan terkecil dari bilangan 150, 44, dan 90.
2. Faktor persekutuan terbesar dari bilangan 74, 100.
3. Sisa dan hasil bagi dari pembagian 879 terhadap 57.

Hasil pada *Maple* adalah sebagai berikut:

```
> ilcm(150, 44, 90)
9900
> gcd(74, 100)
2
> irem(879, 57)
24
> iquo(879, 57)
15
```

Contoh 2.3

Gambar fungsi $\text{signum}(n)$ untuk $-10 \leq n \leq 10$ adalah sebagai berikut.



Gambar 2.1

Catatan:

$\text{signum}(n)$ biasa disingkat menjadi $\text{sgn}(n)$.

Secara visual, kita dapat menentukan nilai $\text{signum}(n)$ adalah 1 atau -1 . Misalnya $\text{signum}(2) = 1$. Tanpa gambar (visual), kita dapat menentukan nilai $\text{signum}(n)$ dengan bantuan *Maple*.

Misalnya kita ingin mengetahui nilai $\text{signum}(-5)$ dan $\text{signum}(7)$, kita tuliskan pada antarmuka *Maple* seperti berikut.

```
> signum(-5)
-1
> signum(7)
1
```

Contoh 2.4

Bangkitkanlah tiga buah bilangan bulat positif dengan nilai maksimum 100 melalui proses acak, kemudian tentukanlah nilai maksimum dan minimumnya.

Hasil *input* dan *output* pada antarmuka *Maple* adalah sebagai berikut.

>

```
acak := (RandomTools[Generate](integer(range = 1 ..100)),  
        RandomTools[Generate](integer(range = 1 ..100)),  
        RandomTools[Generate](integer(range = 1 ..100)))
```

34, 18, 52

```
max(acak);
```

52

```
min(acak);
```

18

Factor

Perintah *factor* digunakan untuk memfaktorkan suatu ekspresi.

Perintah	Parameter
<code>factor(a)</code>	a : ekspresi
<code>factor(a, K)</code>	K : perluasan field

Contoh 3.1

Tentukan faktor dari:

1. 10
2. $6x^2 + 8x - 24$
3. $x^3 + y^3$
4. $z^3 + 5$

Untuk menentukan faktor dari ekspresi di atas, kita dapat menggunakan berbagai fasilitas *factor* dengan menuliskannya pada antarmuka *Maple*.

> `factor(10);`

10

Karena 10 merupakan integer, maka kita dapat menggunakan fasilitas *ifactor* seperti berikut.

> `ifactor(10);`

(2) (5)

> `factor(6 * x^2 + 18 * x - 24)`

$6(x + 4)(x - 1)$

> `factor(x^3 + y^3);`

$(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

> `factor(z^3 + 5);`

$z^3 + 5$

Faktor dari $z^3 + 5$ dapat diperluas pada bilangan kompleks menjadi,

> $factor(z^3 + 5, complex)$
 $(z + 1.70997594667670) (z - 0.854987973338349 + 1.48088260968236I) (z - 0.854987973338349 - 1.48088260968236I)$

Expand

Perintah *expand* digunakan untuk menguraikan suatu ekspresi aljabar.

Perintah	Parameter
<code>expand(expr, expr1, expr2, ..., exprn)</code>	<code>expr</code> : ekspresi aljabar <code>expr[1], expr[2], ..., expr[n]</code>

Contoh 3.2

Uraikan:

- $(x + 1)(x + 2)$
- $\sin(x + y)$

Untuk menguraikan ekspresi di atas, kita dapat menggunakan fasilitas *expand* dengan menuliskannya pada antarmuka *Maple*.

> $expand((x + 1)*(x + 2))$
 $x^2 + 3x + 2$

> $expand(\sin(x + y));$
 $\sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$

Simplify

Perintah *simplify* digunakan untuk menyederhanakan suatu ekspresi.

Perintah	Parameter
<code>simplify(expr)</code>	<code>expr</code> : ekspresi aljabar

Contoh 3.3

Sederhanakan:

- $\sqrt{2} + \sqrt{8}$
- $x + 10y - 5x + y$

Untuk menyederhanakan ekspresi di atas, kita dapat menggunakan fasilitas *simplify* dengan menuliskannya pada antarmuka *Maple*.

$$> \text{simplify}(\sqrt{2} + \sqrt{8})$$

$$> \text{simplify}(x + 10 * y - 5 * x + y)$$

$$3\sqrt{2}$$

$$-4x + 11y$$

Solve

Perintah *solve* digunakan untuk menentukan penyelesaian persamaan, pertidaksamaan, sistem persamaan dan sistem pertidaksamaan.

Perintah	Parameter
<code>solve(equations, variables)</code>	equation : persamaan dan pertidaksamaan atau himpunan atau daftar dari persamaan atau pertidaksamaan. variabel : opsi nama atau himpunan atau daftar.

Contoh 3.4

Tentukan penyelesaian dari $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Penyelesaian:

$$> \text{solve}(x^2 - 4x + 4 = 0, x);$$

$$2, 2$$

Contoh 3.5

Tentukan nilai x dan y yang memenuhi sistem persamaan $x - 4y = 13$ dan $2x + 3y = 7$.

Penyelesaian:

$$> \text{solve}(\{x - 4 * y = 13, 2 * x + 3 * y = -7\}, \{x, y\});$$

$$\{x = 1, y = -3\}$$

Operator Fungsi

Sebuah operator fungsional pada *Maple* adalah bentuk khusus dari prosedur. Operator fungsi ditulis menggunakan notasi panah.

$vars \rightarrow result$

Vars adalah urutan nama variabel (atau variabel tunggal) dan hasilnya adalah hasil dari prosedur yang bekerja pada *vars*. Contohnya $x \rightarrow x^2$, $(x, y) \rightarrow x^2 + y^2$, $(x, y, z) \rightarrow (xy, yz)$.

Contoh 4.1

Diketahui fungsi $f(x) = 3x + 5$. Tentukan nilai dari $x = 2$.

Penyelesaian:

Pertama kita tuliskan notasi fungsi

> $f := x \rightarrow 3 * x + 5$

$x \rightarrow 3x + 5$

Untuk menentukan nilai fungsi, tuliskan:

> $f(2)$

11

Menggambar Grafik Dua Dimensi

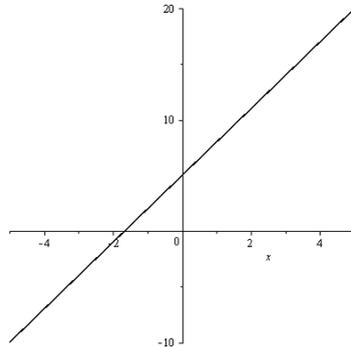
Perintah	Parameter	
plot(f, x)	f	ekspresi dalam variabel bebas x
plot(f, x=x0..x1)	X	variabel bebas
	x0,	batas kanan dan kiri dari sumbu
	x1	horizontal

Contoh 4.2

Gambarkan Grafik $f(x) = 3x + 5$.

Penyelesaian:

> $plot(3 * x + 5, x = -5..5)$



Grafik Tiga Dimensi

Perintah	Parameter	
plot3d(expr, x=a..b, y=c..d, opts)	expr	ekspresi dalam x dan y.
	a,b	konstanta real, prosedur atau ekspresi dalam x
	c,d	konstanta real, prosedur atau ekspresi dalam y
	Opts	Opsional

Contoh 4.3

Gambarlah grafik $z = \sin(x + y)$.

Penyelesaian:

> `plot3d(sin(x + y), x = -1..1, y = -1..1);`



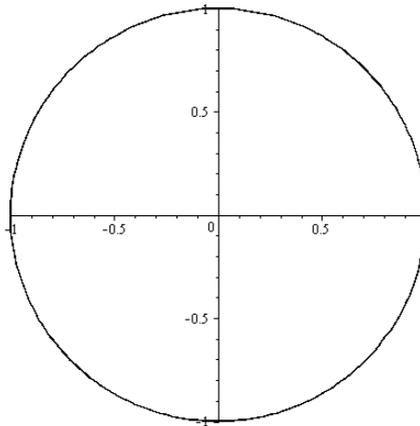
Menggambar Beberapa Fungsi dalam Satu Koordinat

Contoh 4.4

Gambarlah grafik $f(t) = \sin(t)$ dan $f(t) = \cos(t)$ dengan $-\pi \leq t \leq \pi$.

Penyelesaian:

```
> plot([sin(t), cos(t), t=-Pi..Pi]);
```



Menggambar Grafik pada Koordinat Polar

Perintah	Parameter	
polarplot(expr, theta=a1..a2, opts)	expr	ekspresi dalam theta
	a1, a2	konstanta real
	Opts	opsi plot

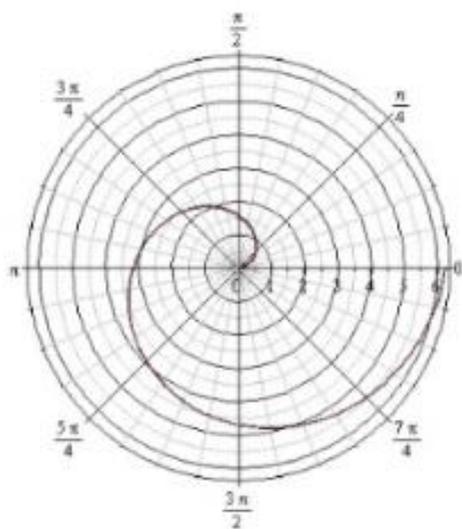
Contoh 4.5

Gambarlah grafik $r = \theta$.

Penyelesaian:

```
> with(plots):
```

```
> polarplot(theta, theta = 0..2* Pi);
```



Perintah		Parameter	
limit(f, x=a)	$\lim_{x \rightarrow a} f$	f	ekspresi aljabar
Limit(f, x=a)		x	Nama
limit(f, x=a, dir)		a	ekspresi aljabar, titik limit, infinity
Limit(f, x=a, dir)		dir	pilihan (left,right,real atau complex)

Contoh 5.1

Tentukan nilai limit berikut.

- $\lim_{x \rightarrow 1} 2x$
- $\lim_{x \rightarrow -2} |x^7|$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{5x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 - 3x + 4$
- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$
- $\lim_{x \rightarrow 5} (\sqrt{x^2 - 25} + 2x)$

Untuk menyelesaikan nilai limit tersebut dapat ditulis pada antarmuka *Maple* sebagai berikut.

$$> \text{limit}(2x, x = 1);$$

2

atau

$$> \lim_{x \rightarrow 1} 2x$$

2

$$> \lim_{x \rightarrow -2} |x^7|$$

- > $\lim_{x \rightarrow \infty} x$ ∞
- > $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ 0
- > $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{5x}$ $\frac{2}{5}$
- > $\lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 - 3 \cdot x + 4)$ 4
- > $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x - 1}{5 - 3x}$ $-\frac{13}{11}$
- > $\lim_{x \rightarrow 5} (\sqrt{x^2 - 25} + 2 \cdot x)$ 10

limit Kanan dan Limit Kiri

Contoh 5.2

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$ dan $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$.

Untuk menyelesaikan nilai limit tersebut dapat ditulis pada antarmuka *Maple* sebagai berikut.

```
limit(1/x, x = 0, right);
 $\infty$ 
limit(1/x, x = 0, left);
 $-\infty$ 
```

Limit Fungsi Sepotong-Sepotong

Contoh 5.3

Tentukan limit fungsi $g(x) = \begin{cases} x^2 - 6, & \text{jika } x < 3 \\ 2x - 1, & \text{jika } 3 \leq x \end{cases}$.

Untuk menyelesaikan nilai limit tersebut dapat ditulis pada antarmuka *Maple* sebagai berikut.

- > $g := \text{piecewise}(x < 3, x^2 - 6, 3 \leq x, 2 * x - 1):$
- > $\text{limit}(g, x = 3);$

∞

6

TURUNAN

Perintah		Parameter	
diff(f, x1, ..., xj)	$\frac{d^j}{dx_1 \dots dx_j} f$	F	eksresi aljabar atau persamaan
diff(f, [x1\$n])	$\frac{d^n}{dx_1^n} f$	x1, x2, ..., xj	nama variabel diferensial
diff(f, x1\$n, [x2\$n, x3], ..., xj, [xk\$m])	$\frac{d^r}{dx_k^m dx_j \dots dx_3 dx_2^n dx_1^n} f$	N	representasi order ke-n

Contoh 6.1

Tentukan turunan dari:

1. $f(x) = x$
2. $f(x) = e^{2x+1}$
3. $f(x) = 2 \cos(x) + \tan(2x)$
4. $f(x) = \sqrt{5x^2 + 3}$
5. $f(x) = \frac{x+2}{2x+3}$
6. $f(x) = \frac{2}{\ln(x)}$

Turunan pertama dari fungsi-fungsi pada Contoh 6.1 dapat ditulis pada antarmuka *Maple* sebagai berikut.

$$> \text{diff}(x, x)$$

1

Atau

$$> \frac{d}{dx} x$$

1

$$> \frac{d}{dx} e^{2x+1}$$

 $2e^{2x+1}$

$$> \frac{d}{dx} (2 \cdot \cos(x) + \tan(2 \cdot x))$$

$$-2 \sin(x) + 2 + 2 \tan(2x)^2$$

$$> \frac{d}{dx} \sqrt{5x^2 + 3}$$

$$\frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 3}}$$

$$> \frac{d}{dx} \frac{x+2}{2x+3};$$

$$\frac{1}{2x+3} - \frac{2(x+2)}{(2x+3)^2}$$

$$> \frac{d}{dx} \frac{2}{\ln(x)};$$

$$-\frac{2}{\ln(x)^2 x}$$

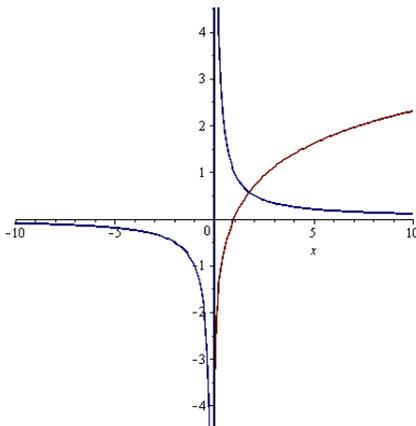
Contoh 6.2

Diberikan $f(x) = \ln(x)$. Tentukan turunan pertama fungsi f dan gambarkan fungsi f dan turunannya dalam satu koordinat.

$$> \frac{d}{dx} \ln(x);$$

$$\frac{1}{x}$$

$$> \text{plot}\left(\left[\ln(x), \frac{1}{x}\right]\right);$$



Turunan Tingkat Tinggi

Contoh 6.3

Tentukan turunan pertama, kedua, dan ketiga dari $f(x) = \sin(x)$.

Selanjutnya buat plot fungsi f beserta turunan-turunannya.

Penyelesaian:

$$> \text{diff}(\sin(x), x\$1);$$

$$\cos(x)$$

$$> \text{diff}(\sin(x), x\$2)$$

$$-\sin(x)$$

$$> \text{diff}(\sin(x), x\$3)$$

$$-\cos(x)$$

atau

$$> \frac{d}{dx} \sin(x)$$

$$\cos(x)$$

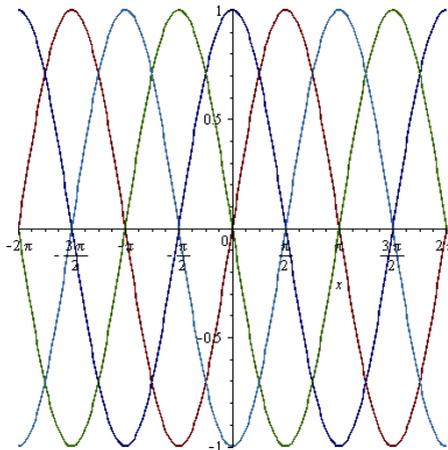
$$> \frac{d^2}{dx^2} \sin(x)$$

$$-\sin(x)$$

$$> \frac{d^3}{dx^3} \sin(x)$$

$$-\cos(x)$$

$$> \text{plot}([\sin(x), \cos(x), -\sin(x), -\cos(x)]);$$



Turunan Parsial

Contoh 6.4

Diketahui $f(x, y) = x^2 + xy^3$. Tentukan $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$, $f_{yx}(x, y)$ dan gambarkan fungsi f dan turunan-turunannya dalam satu koordinat.

Penyelesaian:

```
>diff(x^2 + x*y^3, x);
```

$$2x + y^3$$

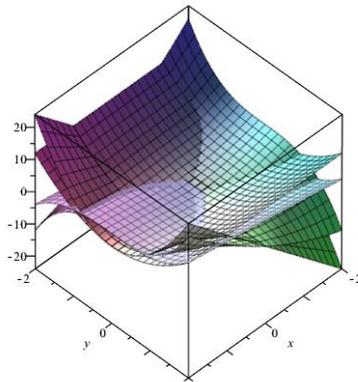
```
>diff(x^2 + x*y^3, y);
```

$$3xy^2$$

```
>diff(x^2 + x*y^3, x, y);
```

$$3y^2$$

```
>plot3d([x*y^3+x^2, y^3+2*x, 3*x*y^2, 3*y^2], x = -2 .. 2, y = -2 .. 2);
```



Perintah		Parameter	
int(expression,x, options)	$\int expression \, dx$	expression	ekspresi aljabar
int(expression,x=a..b, options)	$\int_a^b expression \, dx$	x, y	variabel integral
int(expression, [x, y, ...], options)	$\iint_a^b expression \, dx \, dy$	a, b, c, d	batas integral
int(expression, [x = a..b, y = c..d, ...], options)	$\int_c^d \int_a^b expression \, dx \, dy$		

Integral Tak Tentu

Contoh 7.1

Tentukan

- $\int x \, dx$
- $\int x^3 + 5x^2 - 7 \, dx$
- $\int \sin x \cos x \, dx$
- $\int x + \sin 2x \, dx$

Dengan bantuan *Maple* kita dapat menuliskan,

$$> \int x \, dx$$

$$\frac{1}{2} x^2$$

atau

$$> \text{int}(x, x);$$

$$\frac{1}{2} x^2$$

$$> \text{int}(x^3 + 5x^2 - 7, x);$$

$$\frac{1}{4} x^4 + \frac{5}{3} x^3 - 7x$$

$$> \text{int}(\sin(x) \cdot \cos(x), x);$$

$$\frac{1}{2} \sin(x)^2$$

$$> \text{int}(x + \sin(2 \cdot x), x)$$

$$\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \cos(2x)$$

Integral tentu

Contoh 7.2

Tentukan:

1. $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$.
2. $\int_{-2}^3 x^5 - \sqrt{x} \, dx$
3. $\int_1^5 \frac{(x+2)^2}{3x} \, dx$

Dengan bantuan *Maple* kita dapat menuliskan,

$$> \int_0^{\pi} \sin(x) \, dx$$

$$2$$

$$> \int_{-2}^3 x^5 - \sqrt{x} \, dx$$

$$\frac{665}{6} - \frac{4}{3} \sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

$$> \int_1^5 \frac{(x+2)^2}{3x} \, dx$$

$$\frac{28}{3} + \frac{4}{3} \ln(5)$$

Integral Lipat

Contoh 7.3

Tentukan:

- $\iint x \cdot y^2 \, dx \, dy$
- $\int_{-2}^2 \int_0^y x \cdot y^2 \, dx \, dy$

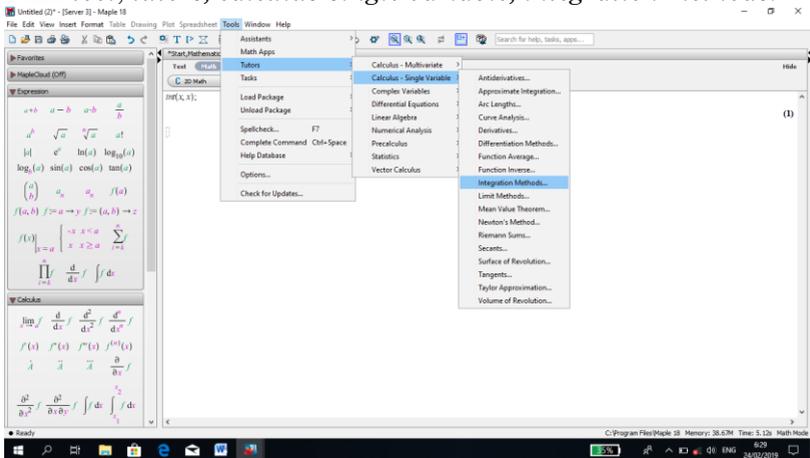
Dengan bantuan *Maple* kita dapat menuliskan,

$$> \iint x \cdot y^2 \, dx \, dy$$
$$\frac{1}{6} x^2 y^3$$

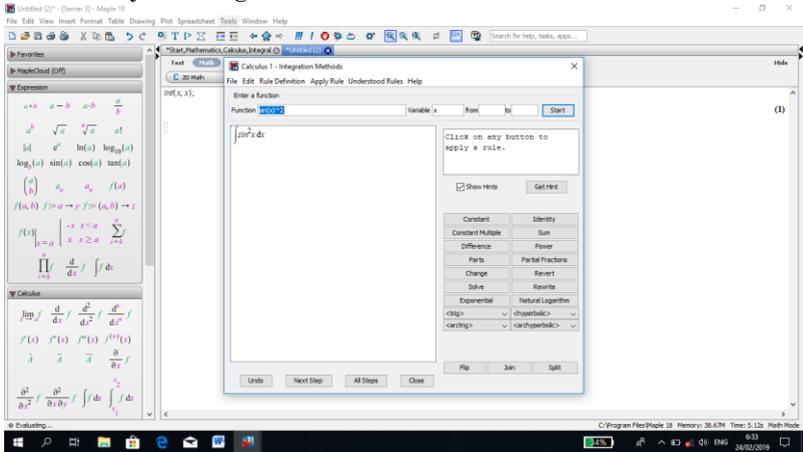
$$> \int_{-2}^2 \int_0^y x \cdot y^2 \, dx \, dy$$
$$\frac{32}{5}$$

Kelebihan lain dari *Maple*, kita dapat mengetahui uraian dari solusi integral dengan memanfaatkan *tools* pada *Maple*. Berikut langkah-langkahnya.

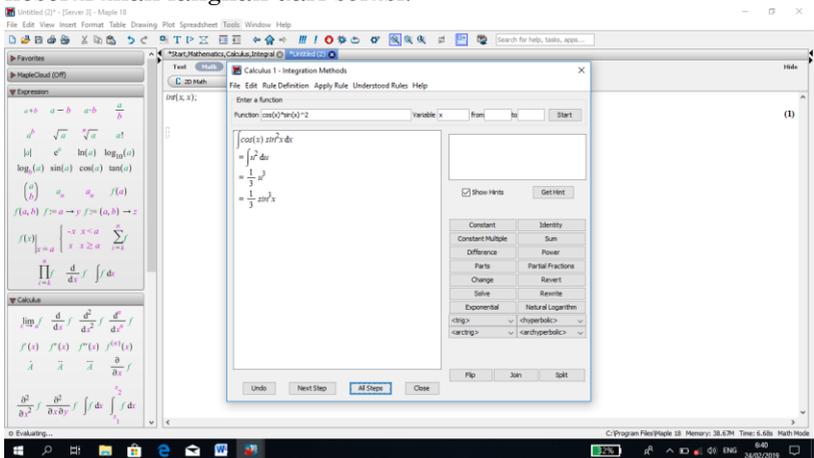
1. Pilih *tool, tutors, calculus-single variable, integration methods*.



2. Muncul layar sebagai berikut.



3. Pada bagian function, kita dapat menuliskan fungsi dari integral yang dituju kemudian pilih *start*. Misalnya ingin mengetahui $\int \cos(x) \sin^2(x) dx$. Apabila kita ingin melihat setiap langkah solusi maka pilih *next step* atau pilih *all step* apabila ingin melihat langsung keseluruhan langkah dari solusi.



Masih banyak lagi fasilitas *tools* untuk mengetahui uraian langkah-langkah solusi. Anda dapat mengeksplorasi lebih lanjut dan akan sangat membantu dalam memahami materi-materi perkuliahan diantaranya Kalkulus, Geometri, Analisis Real, Analisis Kompleks, dan Matematika Terapan.

Perintah	Parameter	
Matrix(r, c, init, ro, sym, sc, sh, st, o, dt, f, a)	R	non negatif integer; dimensi baris dari matriks.
	C	non negatif integer; dimensi kolom dari matriks
	Init	table, array, list, Array, Matrix, Vektor, Himpunan
	Ro	readonly=true
	sym	symbol=name
	Sc	scan=name atau scan=list
	Sh	scan=name atau scan=list
	St	storage=name
	O	order=name
	Dt	datatype=name
	F	fill=value
A	attributes=list	

Jenis-Jenis Matriks

Matriks nol berordo 2x2

Matrix(2);

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks identitas berordo 3x3

Matrix(3, shape = identity);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks dengan elemen berbeda

Matrix([[1, 2, 3], [4, 5, 6]]);

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Operasi pada Matriks

Contoh 8.1

Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}, \text{ dan } C = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Tentukan:

1. $A + B$
2. $A - B$
3. $B + C$
4. $2B$
5. AB
6. AC
7. CA
8. C^3
9. Transpose matriks B (atau ditulis B^T)
10. Invers matriks C (atau ditulis C^T)

Melalui bantuan *Maple* kita dapat menyelesaikan pertanyaan-pertanyaan Contoh 8.1 sebagai berikut.

> $A := \text{Matrix}(1..2, 1..3, 7)$

$$\begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

$B := \text{Matrix}([[-1, 2, 3], [4, -5, 6]])$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$C := \text{Matrix}([[0, 4], [-2, 7]])$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$A + B;$

$$\begin{bmatrix} 6 & 9 & 10 \\ 11 & 2 & 13 \end{bmatrix}$$

$A - B$;

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 3 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

$B + C$

Error, (in rtable/Sum) invalid arguments

$2 \cdot B$;

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 8 & -10 & 12 \end{bmatrix}$$

AB ;

Error, (in LinearAlgebra:-Multiply) first matrix column dimension (3) <> second matrix row dimension (2)

AC ;

Error, (in LinearAlgebra:-Multiply) first matrix column dimension (3) <> second matrix row dimension (2)

Dapatkah Anda menjelaskan kenapa hasilnya *error*?

CA

$$\begin{bmatrix} 28 & 28 & 28 \\ 35 & 35 & 35 \end{bmatrix}$$

C^3 ;

$$\begin{bmatrix} -56 & 164 \\ -82 & 231 \end{bmatrix}$$

$\text{with}(\text{LinearAlgebra}) :$

$\text{Transpose}(C)$;

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$\text{with}(\text{LinearAlgebra}) :$

$\text{MatrixInverse}(C)$;

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{8} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Irisan kerucut (*conic*) yang dibahas pada topik ini adalah lingkaran, ellips, parabola, dan hiperbola. Sebelum berlatih menyelesaikan masalah-masalah yang disajikan, sebaiknya Anda membaca kembali topik-topik tersebut.

Lingkaran

Perintah	Parameter	
circle(c, [A, B, C], n, 'centername'=m) atau	C	Nama objek
	A,B,C	Titik
circle(c, [A, B], n, 'centername'=m) atau	N	Sumbu-x, sumbu-y
	Eqn	Persamaan
circle(c, [A, rad], n, 'centername'=m) atau	Rad	Radius lingkaran
	Center name	Nama pusat lingkaran
circle(c, eqn, n, 'centername'=m)		

Menentukan persamaan, jari-jari, dan pusat lingkaran dari beberapa titik yang diketahui

Contoh 9.1

Tentukan persamaan lingkaran yang melewati tiga titik yaitu A(0,4), B(-2,0) dan C (2,0). Kemudian gambarlah dan tentukan juga titik dan pusat lingkarannya.

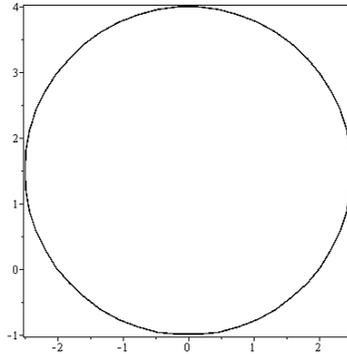
Penyelesaian:

with(geometry) :

```
circle(lingkaran, [point(A, 0, 4), point(B, -2, 0), point(C, 2, 0)], [x, y],
      'centername'=pusat);
```

lingkaran

```
draw(lingkaran);
```



detail(lingkaran);

name of the object	<i>lingkaran</i>
form of the object	<i>circle2d</i>
name of the center	<i>pusat</i>
coordinates of the center	$\left[0, \frac{3}{2}\right]$
radius of the circle	$\frac{\sqrt{25}\sqrt{4}}{4}$
equation of the circle	$-4 + x^2 + y^2 - 3y = 0$

Menentukan pusat dan jari-jari lingkaran dari persamaan yang diketahui

Contoh 9.2

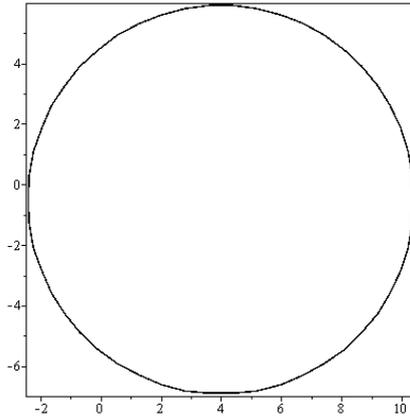
Diketahui persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + y - 25 = 0$. Tentukan pusat, jari-jari lingkaran, dan gambarnya.

Penyelesaian:

with(geometry) :

circle(lingkaran2, x² + y² - 8x + y - 25 = 0, [x, y], 'centername'
= pusat2) :

draw(lingkaran2);



`detail(lingkaran2);`

name of the object	<code>lingkaran2</code>
form of the object	<code>circle2d</code>
name of the center	<code>pusat2</code>
coordinates of the center	$\left[4, -\frac{1}{2}\right]$
radius of the circle	$\frac{\sqrt{165} \sqrt{4}}{4}$
equation of the circle	$x^2 + y^2 - 8x + y - 25 = 0$

Contoh 9.3

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $O(0,0)$ dan berjari-jari 5. Gambarkan lingkaran tersebut.

Penyelesaian:

`with(geometry) :`

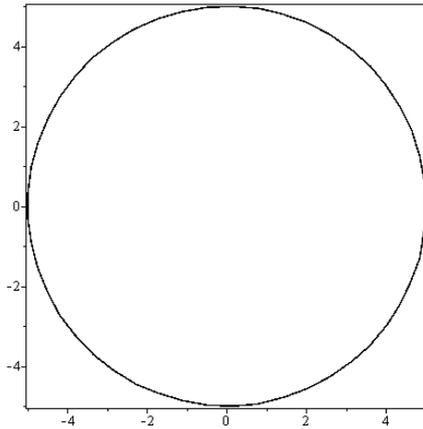
`_EnvHorizontalName := m : _EnvVerticalName := n :`

`circle(c1, [point(A, 0, 0), 5], [x, y], 'centername' = O1) :`

`detail(c1);`

name of the object $c1$
 form of the object $circle2d$
 name of the center $O1$
 coordinates of the center $[0, 0]$
 radius of the circle 5
 equation of the circle $x^2 + y^2 - 25 = 0$

$draw(c1);$



Elips

Perintah	Parameter	
$ellipse(p, [A,B,C,E,F], n)$ atau $ellipse(p, eqn, n)$	p	Nama objek
	A,B,C,C,D,E,F	Titik
	n	Sumbu-x, sumbu-y
	Eqn	persamaan

Contoh 9.4

Diberikan persamaan elips $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$. Tentukan:

- Pusat
- Fokus
- Sumbu mayor dan sumbu minor
- Gambar

Penyelesaian:

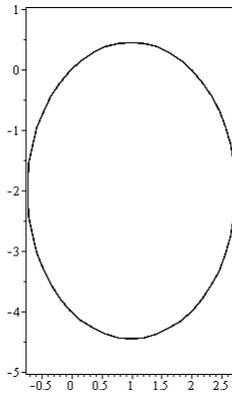
with(geometry) :

*ellipse(elip, 2*x^2 + y^2 - 4*x + 4*y = 0, [x, y]) :*

detail(elip);

name of the object	<i>elip</i>
form of the object	<i>ellipse2d</i>
center	$[1, -2]$
foci	$[[1, -2 - \sqrt{3}], [1, -2 + \sqrt{3}]]$
length of the major axis	$2\sqrt{6}$
length of the minor axis	$2\sqrt{3}$
equation of the ellipse	$2x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$

draw(elip);



Parabola

Perintah	Parameter	
parabola(p, [A, B, C, E, F], n) parabola(p, eqn, n)	p	Nama objek
	A,B,C,C,D,E,F	Titik
	n	Sumbu-x, sumbu-y
	Eqn	persamaan

Contoh 9.5

Diketahui persamaan parabola $y^2 + 12x - 6y + 33 = 0$. Tentukan:

- Verteks
- Direktiks
- Fokus

Penyelesaian:

with(geometry) :

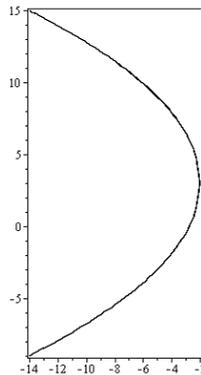
*parabola(parabol, y^2 + 12*x - 6*y + 33 = 0, [x, y]) :*

detail(parabol);

name of the object	<i>parabol</i>
form of the object	<i>parabola2d</i>
vertex	$[-2, 3]$
focus	$[-5, 3]$
directrix	$x - 1 = 0$

equation of the parabola $y^2 + 12x - 6y + 33 = 0$

draw(parabol);



Contoh 9.6

Tentukan gambar dan persamaan parabola dari persamaan: $x^2 - 5y + 30 = 0$.

Penyelesaian:

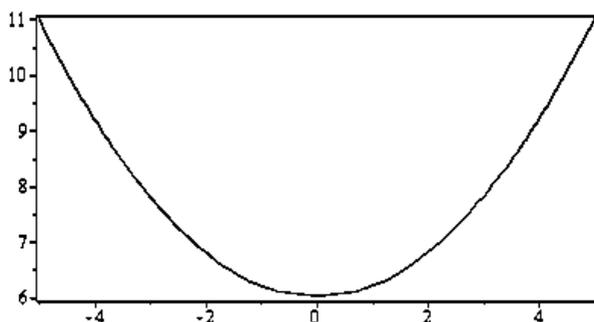
with(geometry) :

parabola(p1, x^2 - 5y + 30 = 0, [x, y]) :

detail(p1);

name of the object *p1*
form of the object *parabola2d*
vertex [0, 6]
focus $\left[0, \frac{29}{4}\right]$
directrix $y - \frac{19}{4} = 0$
equation of the parabola $x^2 - 5y + 30 = 0$

draw(p1);



Hiperbola

Perintah	Parameter	
hyperbola(p, [A, B, C, E, F], n)	p	Nama objek
	A,B,C,C,D,E,F	Titik
hyperbola(p, eqn, n)	n	Sumbu-x, sumbu-y
	Eqn	Persamaan

Contoh 9.7

Diketahui persamaan hiperbola $9y^2 - 4x^2 = 36$. Tentukan:

- Pusat
- Fokus
- asimtot
- gambar

Penyelesaian:

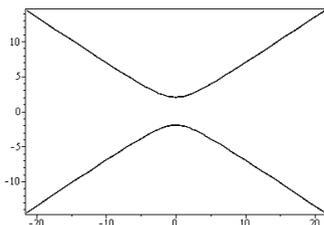
with(geometry) :

hyperbola(*h1*, $9*y^2 - 4*x^2 = 36$, [*x*, *y*]) :

detail(*h1*);

name of the object	<i>h1</i>
form of the object	<i>hyperbola2d</i>
center	[0, 0]
foci	$[[0, -\sqrt{13}], [0, \sqrt{13}]]$
vertices	$[[0, -2], [0, 2]]$
the asymptotes	$\left[y + \frac{2x}{3} = 0, y - \frac{2x}{3} = 0 \right]$
equation of the hyperbola	$9y^2 - 4x^2 - 36 = 0$

draw(*h1*);



Contoh 9.8

Tentukan bagian-bagian hiperbola $5x^2 - y^2 + 30 = 0$ dan gambarkan.

Penyelesaian:

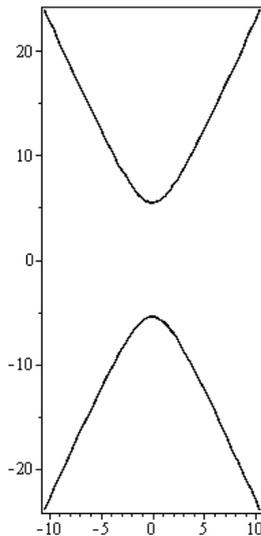
with(geometry) :

hyperbola(*p1*, $5x^2 - y^2 + 30 = 0$, [*x*, *y*]) :

detail(*p1*);

name of the object	<i>p1</i>
form of the object	<i>hyperbola2d</i>
center	[0, 0]
foci	[[0, -6], [0, 6]]
vertices	[[0, - $\sqrt{30}$], [0, $\sqrt{30}$]]
the asymptotes	$\left[y + \frac{\sqrt{6}\sqrt{30}x}{6} = 0, y - \frac{\sqrt{6}\sqrt{30}x}{6} = 0 \right]$
equation of the hyperbola	$5x^2 - y^2 + 30 = 0$

draw(p1);



Geometri transformasi yang akan dibahas dalam panduan ini terdiri dari translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi. Untuk memahaminya, Anda disarankan membaca kembali materi-materi tersebut sebelum mempelajari bagian ini.

Translasi

Perintah	Parameter	
translation(Q, obj, AB)	Q	Nama objek
	Obj	geometri objek
	AB	Arah segmen

Translasi Titik

Contoh 10.1

Tentukan bayangan titik (3,1) jika ditranslasikan oleh (3,-2).

Penyelesaian:

with(geometry) :

point(A, 3, 1) : dsegment(dsg, point(M, 0, 0), point(N, 3, -2)) :

translation(bayangan, A, dsg) :

coordinates(bayangan);

[6, -1]

Translasi Garis lurus

Contoh 10.2:

Tentukan bayangan garis $x - 3y = 0$ oleh translasi (1,2).

Penyelesaian:

with(geometry) :

_EnvHorizontalName := x : _EnvVerticalName := y :

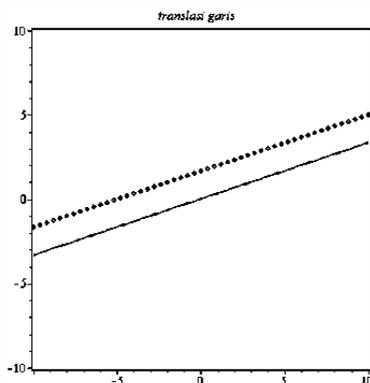
*line(garis, x - 3*y) :*

dsegment(dsg, point(M, 0, 0), point(N, 1, 2)) :

```
translation(garis1, garis, dsg) :
detail({garis, garis1});
```

{	name of the object	<i>garis</i>	,
	form of the object	<i>line2d</i>	
	equation of the line	$x - 3y = 0$	
	name of the object	<i>garis1</i>	}
	form of the object	<i>line2d</i>	
	equation of the line	$5 + x - 3y = 0$	

```
draw({garis(style = LINE, numpoints = 200), garis1},
axes = BOX, style = POINT, title = `translasi garis`);
```



Translasi Kurva

Contoh 10.3

Tentukan bayangan lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ oleh translasi (1,2)

Penyelesaian:

```
with(geometry) :
```

```
_EnvHorizontalName := x : _EnvVerticalName := y :
```

```
circle(c, [point(OO, 0, 0), 1]) :
```

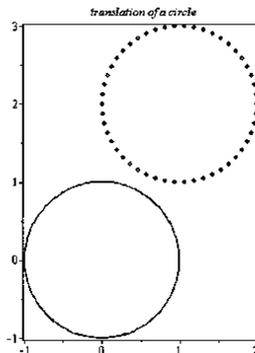
```
dsegment(dsg, point(M, 0, 0), point(N, 1, 2)) :
```

```
translation(ctr1, c, dsg) :
```

```
detail({c, ctr1});
```

name of the object	c
form of the object	$circle2d$
name of the center	OO
coordinates of the center	$[0, 0]$
radius of the circle	1
equation of the circle	$-1 + x^2 + y^2 = 0$
name of the object	$ctr1$
form of the object	$circle2d$
name of the center	$center_ctr1$
coordinates of the center	$[1, 2]$
radius of the circle	1
equation of the circle	$4 + x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$

`draw({c(style = LINE, numpoints = 200), ctr1},
axes = BOX, style = POINT, title = `translation of a circle`);`



Refleksi

Perintah	Parameter	
reflection(Q, P, c)	Q	nama objek
	P	geometri objek
	C	titik atau garis

Refleksi Titik terhadap Garis

Contoh 10.4

Tentukan bayangan titik $A(2,0)$ jika dicerminkan terhadap garis $x + y = 1$.

Penyelesaian:

with(geometry) :

point(A,2,0) :

line(l,x + y = 1, [x,y]) :

reflection(Q,A,l) :

coordinates(Q);

[1, -1]

Refleksi Kurva terhadap Garis

Contoh 10.5

Tentukan bayangan parabola $y^2 + 12*x - 6*y + 33 = 0$ jika dicerminkan terhadap garis $x - y = 1$.

Penyelesaian:

with(geometry) :

*parabola(para,y^2 + 12*x - 6*y + 33 = 0, [x,y])* :

line(l,x - y = 1, [x,y]) :

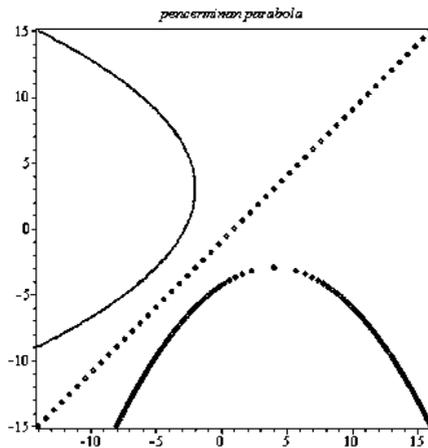
reflection(cermin,para,l)

cermin

detail({para,cermin});

name of the object	<i>cermin</i>	}
form of the object	<i>parabola2d</i>	
vertex	[4, -3]	
focus	[4, -6]	
directrix	$y = 0$	
equation of the parabola	$x^2 - 8x + 52 + 12y = 0$	
name of the object	<i>para</i>	}
form of the object	<i>parabola2d</i>	
vertex	[-2, 3]	
focus	[-5, 3]	
directrix	$x - 1 = 0$	
equation of the parabola	$y^2 + 12x - 6y + 33 = 0$	

```
draw({para(style = LINE, numpoints = 200), cermin, l},
axes = BOX, style = POINT, title = `pencerminan parabola`);
```



Rotasi

Perintah	Parameter	
rotation(Q, P, g, co, R)	Q	nama objek
	P	geometri objek
	G	besar sudut rotasi
	Co	Clockwise = searah jarum jam atau counterclockwise = berlawanan arah jarum jam
	R	Pusat rotasi

Rotasi Titik

Contoh 10.6

Tentukan bayangan titik $P(2,0)$ jika dirotasikan sejauh 180° berlawanan arah jarum jam.

Penyelesaian:

with(geometry) :

point(P, 2, 0) :

rotation(bayanganrotasi, P, Pi, 'counterclockwise') :

coordinates(bayanganrotasi);

$[-2, 0]$

Rotasi Kurva

Contoh 10.7

Tentukan bayangan parabola $y^2 + 12*x - 6*y + 33 = 0$ jika dirotasikan sejauh 60° berlawanan arah jarum jam dan berpusat $O(0,0)$.

Penyelesaian:

with(geometry) :

*parabola(para, y^2 + 12*x - 6*y + 33 = 0, [x, y]) :*

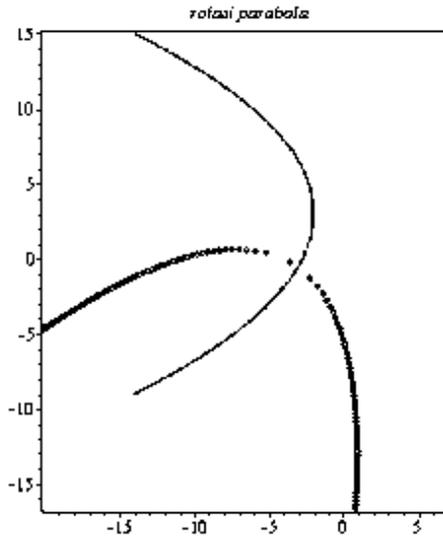
rotation(rotasi, para, $\frac{\text{Pi}}{3}$, 'counterclockwise', point(OO, 0, 0));

rotasi

detail({ para, rotasi });

name of the object	<i>para</i>	name of the object	<i>rotasi</i>
form of the object	<i>parabola2d</i>	form of the object	<i>parabola2d</i>
vertex	$[-2, 3]$	vertex	$\left[-1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}, \dots\right]$
focus	$[-5, 3]$	focus	$\left[-\frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}, \dots\right]$
directrix	$x - 1 = 0$	directrix	$\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2} - \dots$
equation of the parabola	$y^2 + 12x - 6y + 33 = 0$	equation of the parabola	$33 + \frac{3x^2}{4} - \frac{y}{4}$

```
draw({para(style = LINE, numpoints = 200), rotasi},
axes = BOX, style = POINT, title = `rotasi parabola`);
```



Contoh 10.8

Tentukan bayangan garis $y = 2x + 7$ jika dirotasikan sejauh 135° searah jarum jam dan berpusat $O(1,1)$.

Penyelesaian:

with(geometry) :

line(garis, y - 2x - 7 = 0, [x, y]) :

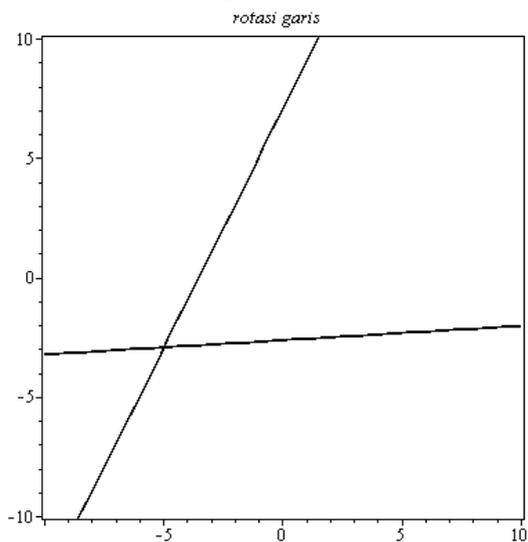
rotation(rotasi, garis, $\frac{4\text{Pi}}{3}$, 'clockwise', point(OO, 1, 1)) :

`detail({ garis, rotasi });`

`{`
`name of the object garis`
`form of the object line2d ,`
`equation of the line $y - 2x - 7 = 0$`
`}`

`name of the object rotasi`
`form of the object line2d`
`equation of the line $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)x + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)y - \frac{17}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$`
`}`

`draw({ garis, rotasi }, title = `rotasi garis`);`



Dilatasi

Perintah	Parameter	
dilatation(Q, P, k, O)	Q	nama objek
	P	geometri objek
	K	rasio dilatasi
	O	Pusat rotasi

Dilatasi Titik

Contoh 10.9

Tentukan bayangan titik P(2,0) oleh dilatasi [O(0,0),3].

Penyelesaian:

with(geometry) :

point(A, 2, 0) :

dilatation(B, A, 3, point(OO, 0, 0)) :

coordinates(B);

[6, 0]

Dilatasi Lingkaran

Contoh 10.9

Tentukan bayangan lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ oleh dilatasi [O(5,3),5]

Penyelesaian:

with(geometry) :

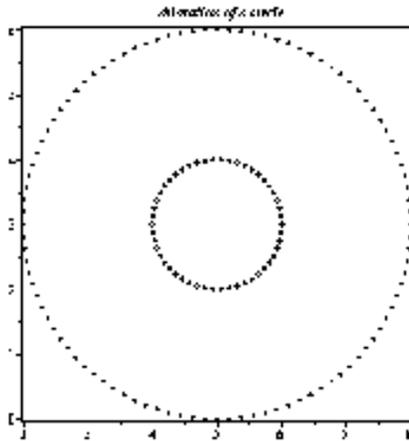
circle(c, [point(OO, 0, 0), 1], [x, y]) :

dilatation(c1, c, 3, point(OO, 5, 3)) :

detail({c, c1});

name of the object	<i>c</i>	name of the object	<i>c1</i>
form of the object	<i>circle2d</i>	form of the object	<i>circle2d</i>
name of the center	<i>OO</i>	name of the center	<i>center_c1</i>
coordinates of the center	[5, 3]	coordinates of the center	[5, 3]
radius of the circle	1	radius of the circle	3
equation of the circle	$-1 + x^2 + y^2 = 0$	equation of the circle	$\frac{127}{9} + \frac{1}{9}x^2 + \frac{20}{9}x + \frac{1}{9}y^2 + \frac{4}{3}y = 0$

```
draw({c(color = red, style = POINT, symbol = DIAMOND),  
  c1(color = blue, style = POINT, symbol = CROSS, numpoints  
    = 100)},  
  title = `dilatation of a circle`);
```



DAFTAR PUSTAKA

- Bartle, R.G. & Sherbert, D.R. (2011). *Introduction to Real Analysis*. USA: John Wiley & Sons, Inc.
- Burdette, A.C. (1971). *Analytic Geometri*. New York: Academic Press.
- Bernardin, L., *et al.* (2011). *Maple Programing Guide*. Canada: Waterloo.
- Varberg, D., Purcell, E.J. & Rigdon, S.E. (2007). *Kalkulus Edisi Kesembilan Jilid 1*. Jakarta: Penerbit Erlangga.
- _____ (2007). *Kalkulus Edisi Kesembilan Jilid 2*. Jakarta: Penerbit Erlangga.