BAHAN AJAR
MATEMATIKA
Untuk Mahasiswa Program Studi
AGRIBISNIS

Dr. Ai Tusi Fatimah, S.Pd., M.Si.
Dr. Adang Effendi, M.Pd.

BAHAN AJAR MATEMATIKA
Untuk Mahasiswa
Program Studi Agribisnis

BAHAN AJAR MATEMATIKA
Untuk Mahasiswa Program Studi Agribisnis

Dr. Ai Tusi Fatimah, S.Pd., M.Si.
Dr. Adang Effendi, M.Pd.

Rumah Cemerlang

BAHAN AJAR MATEMATIKA
Untuk Mahasiswa Program Studi Agribisnis

Penulis:
Dr. Ai Tusi Fatimah, S.Pd.,M.Si.
Dr. Adang Effendi, M.Pd.

Editor: Ai Tusi Fatimah

Cetakan Pertama: November 2021

Cover: Tanti Febrianti

Tata Letak: Tim Kreatif PRCI

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT
Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website: www.rcipress.rcipublisher.org
E-mail: rumahcemerlangindonesia@gmail.com

- Cet. I –: Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2021
; 14,8 x 21 cm
ISBN: 978-623-6478-96-7

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmaanirrahiim,

Alhamdulillahirabbil'aalamin atas petunjuk dan karunia Allah SWT, kami telah menyelesaikan bahan ajar matematika ini. Shalawat dan salam senantiasa tercurah kepada yang terkasih Baginda Muhammad SAW.

Buku ini merupakan bahan ajar mata kuliah matematika di Program Studi Agribisnis. Bahan ajar ini disusun dengan memadukan konsep matematika, konteks pertanian, dan komputasi berbantuan *GeoGebra*. Perpaduan konsep matematika dan konteks pertanian diharapkan dapat memberi wawasan bagi mahasiswa tentang penerapan konsep matematika dalam suatu konteks pertanian. Selain itu, pemanfaatan *GeoGebra* dapat memperkaya kemampuan komputasi dan adaptasi penggunaan teknologi yang semakin pesat pertumbuhannya.

Terima kasih kami ucapkan kepada Manajemen Program Studi Agribisnis Fakultas Pertanian Universitas Galuh yang telah memberi kepercayaan kepada kami untuk mengampu Mata Kuliah Matematika dan menyusun bahan ajar ini.

Semoga bahan ajar matematika ini dapat bermanfaat bagi pengguna dan memberi khasanah baru bagi dunia pendidikan matematika dan agribisnis. Kritik dan saran kami harapkan untuk perbaikan bahan ajar ini.

Ciamis, 2 November 2021

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I
GEOGEBRA: KOMPUTASI DAN VISUALISASI ALJABAR GRAFIS

Deskripsi Materi

1. Mengenal *GeoGebra*
2. Instalasi *GeoGebra*

Relevansi

GeoGebra merupakan perangkat lunak matematika yang digunakan dalam perkuliahan ini sebagai alat bantu komputasi dalam pemecahan masalah matematis dan membuat visualisasi grafis. Komputasi dibutuhkan untuk mendapatkan hasil yang akurat dan visualisasi aljabar dan grafis secara bersama-sama untuk membantu kemampuan representasi dan pemahaman konsep matematis.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa dapat menggunakan *GeoGebra* sebagai alat komputasi dan visualisasi aljabar - grafis.

Materi

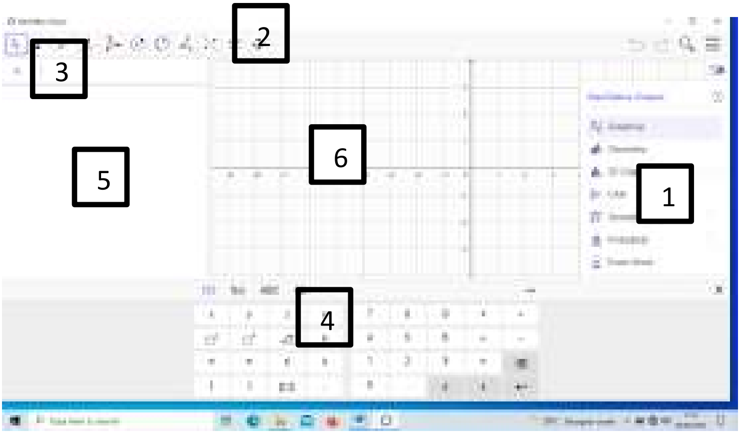
Penguasaan matematika pada era digital ini tidak hanya berfokus pada kemampuan pemahaman konsep matematika saja. Matematika saat ini dibutuhkan untuk memecahkan beragam masalah dengan cepat dan akurat. Kemampuan pemahaman konsep matematika dan penguasaan alat komputasi saat ini keduanya memiliki peranan penting dalam implementasi perkuliahan matematika.

GeoGebra merupakan perangkat lunak matematika yang menawarkan fitur-fitur ekspresi matematika. Bilangan, aljabar, dan grafis dapat tervisualisasikan dengan sangat mudah dan menarik di dalam perangkat lunak tersebut. Oleh karena itu, pada bagian ini akan dibahas tampak muka perangkat lunak sebagai pengantar penggunaan perangkat lunak pada bab berikutnya.

A. Mengenal Geogebra

GeoGebra adalah perangkat lunak matematika yang dapat digunakan sebagai alat bantu dalam pembelajaran matematika. Perangkat lunak ini dikembangkan untuk proses belajar mengajar matematika di sekolah oleh Markus Hohenwarter di Universitas Florida Atlantic. Keunggulan perangkat lunak ini adalah visualisasi geometri yang memudahkan pengguna dalam memahami konsep-konsep matematika.

Instalasi *GeoGebra* mudah dilakukan. Begitu juga tampilan dan *tools GeoGebra* sangat mudah untuk digunakan. Ketika kita memulai membuka *GeoGebra*, maka tampilan yang akan muncul seperti pada Gambar 1.1



Gambar 1. Tampilan Antarmuka *GeoGebra*

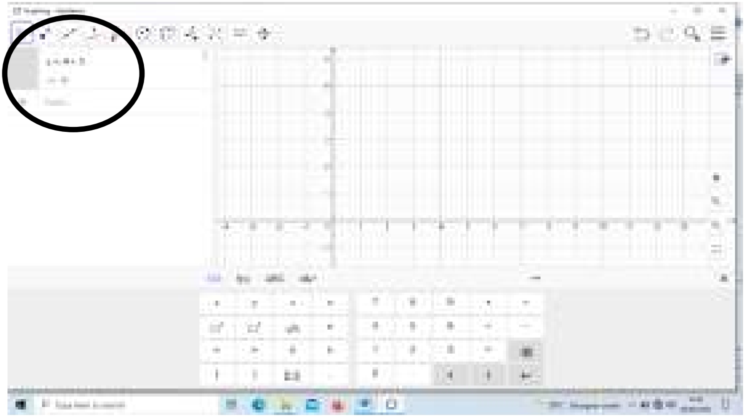
Gambar 1 merupakan tampilan awal ketika kita membuka *GeoGebra*. Bagian yang diberi angka 1 merupakan menu utama *GeoGebra*. Kita bisa memilihnya sesuai dengan kebutuhan. Misalnya kita ingin bekerja memecahkan masalah yang berhubungan dengan geometri satu atau dua dimensi maka kita dapat memilih ingin "*Graphing*". Jika kita akan bekerja dengan kebutuhan visualisasi 3D maka kita dapat memilih "*Geometry*". Jika kita akan bekerja dengan aljabar maka kita dapat memilih "*CAS*", dan seterusnya.

Bagian 2 merupakan alat-alat yang diberikan oleh *GeoGebra* untuk digunakan sesuai kebutuhan. Setiap menu utama memiliki alat-alat yang berbeda-beda. Sebagai contoh, jika kita memilih menu "*CAS*" maka akan muncul tampilan seperti pada Gambar 2. Pada bagian 3, kita dapat memasukkan berbagai ekspresi matematika dengan *keyboard* pada bagian 4. Hasil masukan akan keluar dalam dua bentuk yaitu aljabar pada bagian 5 dan grafis pada bagian 6.

Gambar 2. Tampilan *GeoGebra* dengan Menu "CAS"

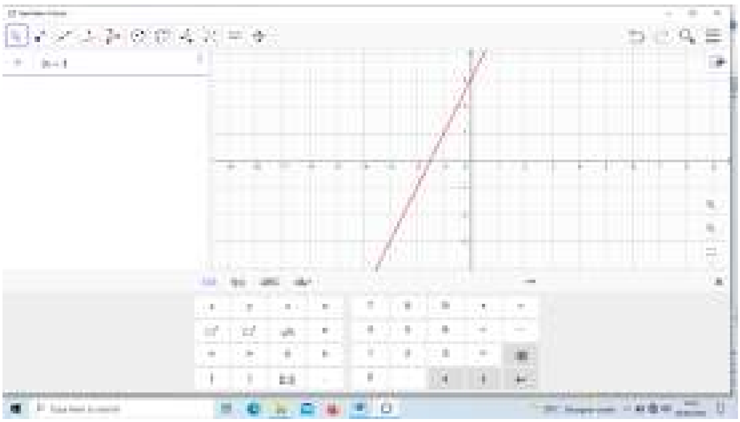
Sama seperti halnya pada kalkulator biasa, *GeoGebra* memfasilitasi operasi dasar matematika seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian dan pemangkatan. Masing-masing operasi dasar memiliki simbol pada tombol keyboard yang harus dipilih. Perhitungan dengan operasi dasar matematika dapat dilakukan dengan memasukkan bilangan dan operasinya seperti pada kalkulator, kemudian tekan enter.

Misalnya kita akan menghitung nilai dari $4 + 5$, maka kita tuliskan bilangan dan operasinya. Hasilnya dapat dilihat pada Gambar 3 berikut. Perhatikan luaran hasil pada bagian yang dilingkari.



Gambar 3. Hasil Operasi Bilangan

Selanjutnya, kita coba masukan ekspresi linear $2x + 3$, maka akan muncul grafik linear seperti Gambar 4 berikut ini.

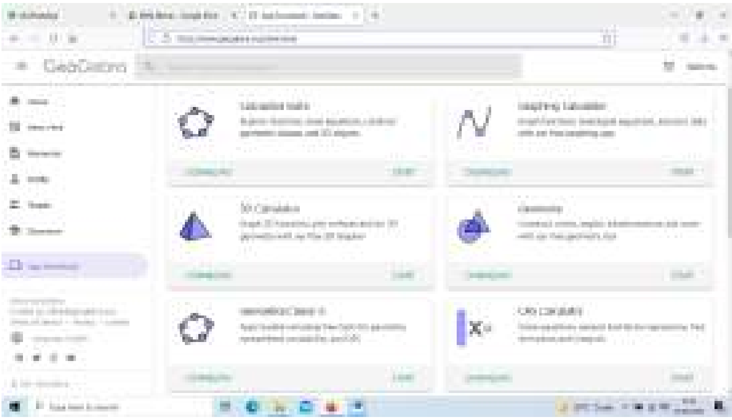


Gambar 4. Ekspresi Linear

Ekspresi-ekspresi matematika lainnya akan dipelajari pada bagian-bagian BAB selanjutnya.

B. Menginstal *GeoGebra*

GeoGebra dapat digunakan di perangkat komputer maupun android. *GeoGebra* juga sangat mudah didapatkan. Untuk perangkat komputer, Anda dapat mengunduhnya di laman https://www.GeoGebra.org/download. Anda akan mendapatkan tampilan seperti pada Gambar 5 berikut ini.



Gambar 5. Tampilan *Web Download GeoGebra*

Untuk keperluan perkuliahan matematika ini, Anda dapat mengunduh "*GeoGebra Classic 6*". Setiap bab pada buku ini akan menyertakan komputasi atau visualisasi dengan menggunakan *GeoGebra Classic 6.*

Bagi Anda yang belum mempunyai perangkat komputer, jangan berkecil hati. Anda dapat mengunduh aplikasi *GeoGebra* dengan *android* yang Anda miliki. Silahkan Anda masuk ke *play store* seperti pada Gambar 6. Anda dapat memasang dan menggunakannya GeoGebra sesuai dengan materi yang disajikan. Hal tersebut dikarenakan menu *GeoGebra* pada android berbeda dengan komputer. Eksplorasi lebih lanjut harus terus Anda lakukan pada

GeoGebra android Anda.

Gambar 6. *GeoGebra* Untuk Android

Misalnya, Anda berhadapan dengan materi sistem persamaan linear yang merupakan bagian dari aljabar, maka GeoGebra CAS Calculator dapat digunakan. Untuk materi yang berhubungan dengan geometri bangun ruang, maka

Geogebra 3D Graphing Calculator dapat Anda gunakan. Diskusi tentang penggunaan Android dapat kita lakukan di kelas.

RANGKUMAN

Geogebra sebagai perangkat lunak merupakan salah satu perangkat yang banyak digunakan dalam pembelajaran matematika. Komputasi dan visualisasi aljabar-grafis yang dapat dilakukan secara bersama-sama sangat menunjang pemahaman konsep dan melakukan pemecahan masalah yang lebih cepat dan akurat.

SOAL LATIHAN

1. Lakukan instalasi *GeoGebra* pada perangkat yang Anda miliki.
2. Masukkan ekspresi berikut pada *Geogebra* dan perhatikan hasilnya.
   a. $1000 \times 250 + 200000 - 4000$
   b. $2^3 + 3^5 - 5^2$
   c. $\sqrt{2} - \sqrt[3]{8} + 5\sqrt{3}$
   d. $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$
   e. $0{,}25 + 30\% - 2{,}745$
   f. x
   g. $y = x$
   h. $x + y = 5$
   i. $x - y > 2$

BAB II
BILANGAN

Deskripsi Materi

1. Bilangan
2. Sifat Aljabar Bilangan Real
3. Representasi Bilangan
4. Substitusi Bilangan
5. Aproksimasi Bilangan

Relevansi

Bilangan merupakan konsep dasar yang selalu terkoneksi dengan konsep matematika lainnya.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari BAB ini, mahasiswa memiliki kemampuan representasi bilangan, melakukan substitusi bilangan pada suatu konteks masalah, dan melakukan aproksimasi pada konteks yang tepat.

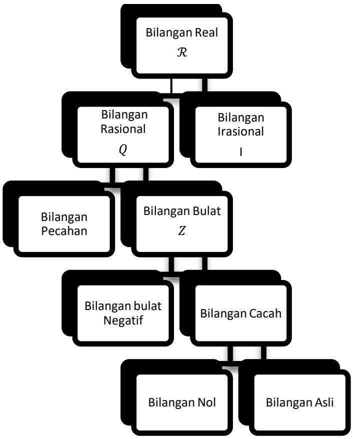
Materi

A. Bilangan

Konsep bilangan lahir dan berkembang seiring dengan perkembangan peradaban manusia. Bilangan adalah suatu konsep matematika yang digunakan untuk pencacahan dan pengukuran. Simbol atau lambang yang digunakan untuk mewakili suatu bilangan disebut sebagai angka atau lambang bilangan. Angka hanya sebuah simbol untuk mempresentasikan sebuah bilangan. Sampai sekarang sudah banyak sistem atau cara yang telah dikembangkan untuk merepresentasikan bilangan, diantaranya adalah Hindu-Arab, Romawi, Mesir, Yunani, Babilonia, dan Cina.

Misalnya bilangan empat direpresentasikan dengan simbol yang berbeda-beda oleh masing-masing daerah berdasarkan kebudayaannya. Sekalipun simbolnya berbeda, tetapi maknanya sama yaitu menunjukkan bilangan empat.

Seiring dengan berkembangnya kebudayaan dan peradaban, maka terbentuklah simbol bilangan yang berlaku secara umum atau internasional yang kita kenal dan dipakai dalam kehidupan sehari-hari sekarang. Masing-masing bilangan dihimpun dan diberi notasi yang khas dengan cakupan yang berbeda-beda sehingga terbentuk sistem bilangan seperti pada gambar berikut.



Gambar 7. Skema Sistem Bilangan Real

B. Sifat Aljabar Bilangan Real

Pada himpunan bilangan real R terdapat dua operasi biner yang dinotasikan oleh + dan $\cdot$, yang masing-masing disebut penjumlahan dan perkalian. Operasi ini memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $a + b = b + a$, untuk setiap $a, b \in R$ (sifat komutatif penjumlahan).
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk setiap $a, b, c \in R$ (sifat asosiatif penjumlahan).
3. Terdapat elemen $0 \in R$, sedemikian sehingga $a + 0 = a$ dan $0 + a = a$ untuk setiap $a \in R$ (eksistensi elemen nol).
4. Untuk setiap $a \in R$ terdapat unsur $-a \in R$ sedemikian sehingga $a + (-a) = 0$ dan $(-a) + a = 0$ (eksistensi elemen invers penjumlahan).
5. $a \cdot b = b \cdot a$ untuk setiap $a, b \in R$ (sifat komutatif perkalian).
6. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ untuk setiap $a, b, c \in R$ (sifat asosiatif perkalian).
7. Terdapat elemen $1 \in R$, sedemikian sehingga $1 \cdot a = a$ dan $a \cdot 1 = a$ untuk setiap $a \in R$ (eksistensi unsur satuan).
8. Untuk setiap $a \in R$, $a \neq 0$, terdapat unsur $\frac{1}{a} \in R$ sedemikian sehingga $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ dan $\frac{1}{a} \cdot a = 1$ (eksistensi elemen invers perkalian).
9. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ untuk setiap $a, b, c \in R$ (sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan).

Teorema

a. Jika z dan a adalah elemen-elemen di R dengan $z + a = a$ maka $z = 0$.
b. Jika u dan $b \neq 0$ adalah elemen-elemen di R dengan $u \cdot b = b$ maka $u = 1$.
c. Jika $a, b \in R$ sehingga $a + b = 0$, maka $b = -a$.
d. Jika $a, b \in R$ dan $a \neq 0$ sehingga $a \cdot b = 1$, maka $b = \frac{1}{a}$.

Definisi

Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$, dengan *a, b* bilangan bulat dan $\mathrm{b} \neq 0$. Bilangan rasional dilambangkan oleh Q.

C. Representasi Bilangan

Seperti yang sudah dibahas pada bagian awal bahwa bilangan suatu bilangan dapat dilambangkan dengan cara berbeda. Begitu juga pada bilangan real. Misalnya bilangan 1 (satu). Bilangan 1 merupakan bagian dari bilangan bulat atau secara spesifik masuk pada bilangan asli. Wujud bilangan 1 ini dapat diubah menjadi wujud lain yang nilainya sama yaitu 1, misalnya $\frac{5}{5}$.

Bilangan 1 dan $\frac{5}{5}$ dapat dikatakan sebagai produk representasi matematis. Mengubah bentuk 1 menjadi $\frac{5}{5}$ memerlukan proses melalui konsep operasi pembagian bilangan. Proses ini dapat dikatakan sebagai proses representasi.

Bilangan 1 memiliki banyak representasi bilangan yang berbeda bergantung pada konsep matematika apa yang dilakukan pada proses representasi. Berikut ini diberikan contoh beragam representasi dari bilangan 1 dan contoh lain dari beberapa bilangan.

1. $1 = \frac{5}{5} = \frac{z}{z} = a^0 = 100\% = \log 10 = 99 - 98$
2. $5 = \frac{5}{1} = \frac{100}{20} = \frac{5a}{a} = \sqrt{25} = 4 + 1$
3. $1000 = 10^3 = \sqrt[3]{10^9}$
4. $30000 = 3 \cdot 10^4$
5. $4500000 = 4{,}5 \cdot 10^6$

6. $0{,}001 = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$
7. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \sum_{n=1}^{5} n$

Catatan:

Dalam kehidupan sehari-hari, penghitungan aritmatika yang biasa dilakukan adalah menggunakan sistem desimal (sistem berbasis sepuluh). Dalam sistem desimal, suatu bilangan 1259 dapat dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} 1259 &= 1000 + 200 + 50 + 9 \\ &= 1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 9 \times 10^0 \end{aligned}$$

D. Substitusi Bilangan

Banyak konteks di bidang pertanian yang melibatkan bilangan di dalamnya. Konteks-konteks pertanian tersebut seringkali terwujud dalam bentuk aturan atau rumus-rumus tertentu. Kemampuan melakukan substitusi bilangan pada suatu rumus merupakan langkah awal dan penentu dalam keberhasilan melakukan penyelesaian dalam konteks pertanian tersebut. Substitusi adalah langkah awal sebelum operasi matematika lanjutan dilakukan.

Contoh 1.1

Daya kecambah adalah persentase dari banyaknya benih yang menghasilkan kecambah terhadap banyaknya benih yang dibuat menjadi kecambah, dirumuskan:

$$\text{Daya kecambah} = \frac{\text{banyaknya benih yang berkecambah}}{\text{banyaknya benih yang dikecambahkan}} \cdot 100\%$$

Pada sebuah wadah, seorang petani merendam benih padi sebanyak 2500 biji. Dua hari kemudian sebanyak 2355 benih mengeluarkan kecambah. Berapa daya kecambah benih tersebut?

Penyelesaian masalah pada Contoh 1.1 di atas memerlukan kemampuan substitusi bilangan pada rumus yang ditetapkan. Kita harus membaca dengan seksama untuk mendapatkan bilangan yang sesuai dengan rumus. Bilangan 2500 merepresentasikan banyaknya benih yang dikecambahkan sedangkan 2355 merepresentasikan banyaknya benih yang berkecambah. Kita substitusi pada rumus menjadi:

$$\text{Daya kecambah} = \frac{2355}{2500} \cdot 100\%$$

Berdasarkan hasil perhitungan, diperoleh daya kecambah 94%

E. Aproksimasi Bilangan

Perhatikan hasil perhitungan daya kecambah Contoh 1.1 pada *GeoGebra* Gambar 8 berikut ini. Ketika kita input bilangan $\frac{2355}{2500} \cdot 100$, maka akan keluar hasil $\frac{471}{5}$. Hasil tersebut berbentuk pecahan. Hasil perhitungan dalam bentuk pecahan biasa memang cenderung tidak digunakan oleh orang-orang dalam bentuk persentase. Untuk mengubahnya ke dalam bentuk digit berhingga dalam *Geogebra* , kita cukup menekan $\approx$ sehingga muncul bilangan 94,2.

Bilangan 94% pada Contoh 1.1 merupakan hasil proses pembulatan dari bilangan 94,2%. Hasil perhitungan dapat dikategorikan ke dalam dua bagian yaitu hasil eksak dan hasil aproksimasi. Bilangan $\frac{471}{5}$ merupakan hasil eksak sedangkan 94 merupakan hasil aproksimasi.

Gambar 8. Hasil Perhitungan dengan *GeoGebra*

Kita jelaskan lebih lanjut terkait dengan hasil eksak dan aproksimasi. Misalnya bilangan $\frac{1}{3}$ ditampilkan dalam bentuk tak hingga banyak angka (digit) dibelakang koma desimal, $\frac{1}{3} = 0{,}3333333333333$. Bilangan $\frac{1}{3}$ ditampilkan dalam bentuk berhingga

$$\frac{1}{3} = 0{,}333 = \frac{333}{1000}$$

diantara $\frac{1}{3}$ dengan 0,333 terdapat selisih $\frac{1}{3000}$

$$\frac{333}{1000} + \frac{1}{3000} = \frac{999 + 1}{3000} = \frac{1000}{3000}$$

Apabila bilangan $\frac{1}{3}$ ditampilkan dalam bentuk berhingga bilangan di belakang koma, maka itu hanyalah pendekatan saja. $\frac{1}{3}$ adalah hasil eksak dan 0,333 adalah hasil pendekatan tiga angka di belakang koma.

Teknik aproksimasi terdiri dari pembulatan dan pemotongan. Misal, $\frac{1}{7} = 0{,}1428571429 \ldots$. Hasil pembulatan dengan tiga digit dibelakang koma adalah 0,143. Hasil pemotongan dengan tiga digit dibelakang koma adalah 0,142.

RANGKUMAN

Bilangan yang cenderung digunakan dalam bidang agribisnis memiliki ruang lingkup bilangan real. Bilangan real memiliki sembilan sifat aljabar yang merupakan dasar operasi bilangan. Representasi bilangan berupa produk merupakan wujud dari ekspresi bilangan dan representasi berupa proses merupakan kemampuan mengubah ekspresi matematika ke suatu ekspresi matematika lainnya dengan suatu konsep matematika yang tepat. Substitusi bilangan merupakan proses menetapkan bilangan dari konteks ke dalam suatu rumus yang telah ditetapkan. Hasil perhitungan terdiri dari hasil eksak dan aproksimasi. Aproksimasi dapat dilakukan dengan melakukan pembulatan atau pemotongan bilangan.

SOAL LATIHAN

1. Setelah memahami sifat-sifat aljabar dari bilangan real, selanjutnya kalian tentukan nilai dari:
   a. $-4-(-2)+(-10)$
   b. $2(-10)+5$
   c. $-2+10\cdot\frac{3}{5}-18$
   d. $\frac{1}{10}\cdot\frac{5}{2}+4\cdot\frac{1}{2}$
   e. $0{,}04\cdot 3\%\cdot 20000\cdot\frac{4}{5}$

2. R/C rasio merupakan salah satu alat untuk mengukur kelayakan usahatani. R/C rasio dirumuskan dengan:

$$\text{R/C rasio} = \frac{\text{penerimaan}}{\text{biaya tetap} + \text{biaya variabel}}$$

Jika R/C rasio < 1, maka usaha tani tidak layak.

Jika R/C rasio $= 1$, maka usaha tani timpas.

Jika R/C rasio > 1, maka usaha tani layak dan menguntungkan.

Seorang petani melakukan budidaya tanaman cabai merah. Biaya produksi terdiri dari biaya tetap dan biaya variabel. Biaya tetap (sewa lahan, pajak, dan pengairan) dalam satu musim yang dikeluarkan oleh petani sebesar Rp. 4.000.000,-, sedangkan biaya variabel (pupuk, bibit, tenaga kerja, dan obat) sebesar Rp. 15.000.000,-. Sementara hasil yang diperoleh dari budidaya tanaman tersebut sebesar Rp. 22.000.000,-.

a. Hitunglah R/C rasio
b. Bagaimana tingkat kelayakan usahatani tersebut.

3. Diberikan data berikut ini:

X	0,5	1	1,5	2	2,5
Y	0,7	3,4	7,2	12,4	20,1

Dipilih model linear untuk merepresentasikan data tersebut yaitu $y = ax + b$, dengan

$$a = \frac{m \sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{m \sum {X_i}^2 - (\sum X_i)^2}$$

dan

$$b = \frac{m \sum {X_i}^2 \sum Y_i - \sum X_i Y_i \sum X_i}{m \sum {X_i}^2 - (\sum X_i)^2}$$

Tentukan model linear tersebut.
(Catatan: m adalah banyaknya titik data)

BAB III
HIMPUNAN DAN FUNGSI

Deskripsi Materi

1. Himpunan
2. Fungsi

Relevansi

Konsep himpunan merupakan konsep dasar untuk mendukung konsep fungsi dan konsep matematika lainnya. Konsep fungsi merupakan konsep sentral matematika pada ranah terapan.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari BAB ini, mahasiswa diharapkan dapat memahami konsep himpunan dan fungsi, menyajikan fungsi, dan membedakan jenis-jenis fungsi.

Materi

A. Himpunan

Topik himpunan dikembangkan oleh Boole dan Cantor pada Abad XIX dan kemudian berkembang pesat pada Abad XX. Kata himpunan dalam matematika merupakan istilah yang tidak didefinisikan. Himpunan dicirikan oleh sifat objek atau benda yang didalamnya didefinisikan secara jelas. Objek tersebut dapat merupakan objek konkrit ataupun abstrak. Himpunan bilangan prima, himpunan kendaraan beroda dua, himpunan mahasiswa matematika adalah contoh-contoh himpunan dengan sifat-sifat keanggotaannya yang dinyatakan dengan jelas. Dengan demikian, suatu objek dapat ditentukan apakah objek tersebut berada dalam himpunan atau diluar himpunan. Setiap objek yang terletak di dalam himpunan atau mempunyai sifat yang telah ditentukan terlebih dahulu disebut elemen atau anggota atau unsur himpunan tersebut.

Unsur-unsur dalam suatu himpunan biasanya dilambangkan dengan menggunakan huruf kecil, misal: *a, b, c, ...,z*; sedangkan lambang himpunan biasanya ditulis menggunakan huruf kapital, misal: *A, B, C, ...,Z*. Lambang untuk menyatakan keanggotaan suatu objek adalah $\in$. Jika elemen *x* dalam himpunan A , maka ditulis

$$x \in A$$

dan dikatakan bahwa *x* adalah anggota A, atau *x* milik A. Jika *x* tidak terdapat dalam A, maka ditulis

$$x \notin A$$

Himpunan dapat dituliskan dalam berbagai cara. Suatu himpunan biasanya didefinisikan dengan mendaftar unsur-unsurnya secara eksplisit. Himpunan yang jumlah anggotanya hingga, biasanya dinyatakan dengan cara tabulasi yaitu dengan cara menuliskan anggota-anggotanya satu per satu dalam sebuah kurung kurawal. Misalnya A adalah himpunan huruf vokal dalam abjad, maka kita dapat menuliskan $A = \{a, i, u, e, o\}$. Penulisan urutan atau letak anggota himpunan tidak diperhatikan.

Himpunan juga dapat ditulis dengan menggunakan ciri penentu atau ciri/ sifat keanggotaan himpunan tersebut. Jika P menunjukkan sifat yang bermakna dan tidak ambigu untuk elemen dari himpunan S, maka kita tulis

$$\{x \in S: P(x)\}$$

untuk himpunan semua elemen x di S yang bersifat P benar. Jika himpunan S dipahami dalam konteks ini, maka notasi ini sering diabaikan.

Himpunan huruf vokal dalam abjad dapat ditulis:

$$A = \{x|x \text{ huruf vokal dalam abjad}\}$$

atau

$$A = \{x: x \text{ huruf vokal dalam abjad}\}.$$

Beberapa himpunan khusus digunakan di seluruh buku ini dan dilambangkan dengan simbol standar seperti berikut ini.

1. Himpunan bilangan $N = \{1,2,3, \dots\}$,
2. Himpunan bilangan bulat $Z = \{1,1,-1,2,-2, \dots\}$,
3. Himpunan bilangan rasional
$$Q = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in Z \text{ dan } n \neq 0\right\},$$
4. Himpunan bilangan real R.

Contoh 3.1

1. Himpunan $\{x \in \mathrm{N} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ terdiri dari bilangan yang memenuhi persamaan yang dinyatakan. Karena satu-satunya solusi dari persamaan kuadrat adalah $x = 1$ dan $x = 2$, dan dapat ditunjukkan dengan himpunan $\{1,2\}$.
2. Bilangan asli *n* adalah genap jika memiliki bentuk $n = 2k$ untuk beberapa $k \in \mathrm{N}$. Himpunan bilangan asli genap ditulis $\{2k : k \in \mathrm{N}\}$.

Jika setiap elemen dari himpunan A juga milik himpunan B , maka dikatakan bahwa A adalah himpunan bagian dari B dan ditulis

$$A \subseteq B \text{ atau } B \supseteq A.$$

jika $A \subseteq B$ maka dikatakan bahwa himpunan A adalah himpunan bagian yang tepat dengan himpunan B, tapi jika ada paling sedikit satu unsur B yang tidak ada di A maka ditulis

$$A \subset B .$$

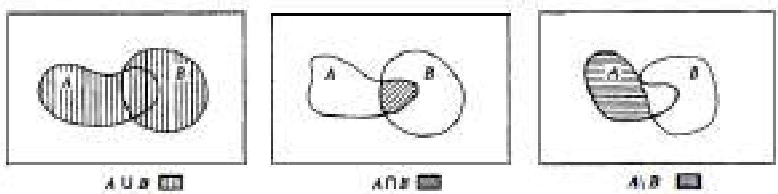
Definisi 3.2

Dua himpunan A dan B dikatakan sama, dan ditulis $A = B$, jika kedua himpunan tersebut mengandung unsur-unsur yang sama. Dengan demikian, untuk membuktikan bahwa himpunan A dan B adalah sama, kita harus menunjukkan bahwa

$$A \subseteq B \text{ dan } B \subseteq A.$$

Operasi Himpunan

Himpunan baru dapat diperoleh dengan mendefinisikan metode dari beberapa operasi. Operasi baru ditetapkan dari arti kata-kata "atau", "dan", dan "tidak". Kata "atau" digunakan dalam arti inklusif, memunculkan kemungkinan bahwa x mungkin milik kedua himpunan yang kadang-kadang ditandai dengan "dan/atau".



Gambar 9. Operasi Fungsi

Definisi 3.3

a. Gabungan himpunan A dan B adalah himpunan $A \cup B := \{x : x \in A \text{ atau } x \in B\}$.

b. Irisan himpunan A dan B adalah himpunan $A \cap B := \{x : x \in A \text{ dan } x \in B\}$.

c. Komplemen dari B relatif ke A adalah himpunan $A \setminus B := \{x : x \in A \text{ dan } x \notin B\}$.

Himpunan yang tidak memiliki unsur-unsur disebut himpunan kosong dan dilambangkan dengan simbol $\emptyset$.

Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas jika mereka tidak memiliki unsur-unsur yang sama; dinyatakan dengan $A \cap B = \emptyset$.

B. Fungsi

Fungsi muncul jika suatu besaran bergantung pada pada besaran lain.

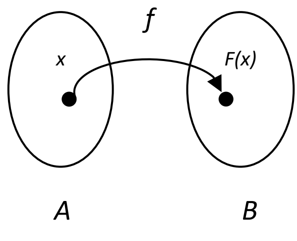
Contoh 3.4

Populasi manusia P bergantung pada waktu t.
Biaya pengiriman surat B bergantung pada berat w.
Biaya pupuk pertanian bergantung pada luas area pertanian.

Definisi 3.5

Misalkan A dan B adalah dua himpunan. Fungsi f adalah suatu aturan yang memadankan setiap $x \in A$ dengan tepat satu elemen $y = f(x) \in B$.

Perhatikan gambar diagram panah di bawah ini. Fungsi f yang memetakan (memadankan) setiap anggota A dengan tepat satu anggota B dinotasikan oleh $f: A \to B$.



Gambar 10. Diagram Panah

Biasanya fungsi yang dinyatakan oleh himpunan A dan B merupakan himpunan bilangan real. Himpunan A disebut dengan daerah asal (domain) fungsi. Himpunan B disebut daerah kawan (kodomain). Bilangan $f(x)$ adalah nilai *f* dari *x*. $f(x)$ dibaca *f* dari *x*.

Daerah hasil (*range*) *f* adalah himpunan semua nilai $f(x)$ di mana *x* berubah sepanjang daerah A.

Aturan pemadanan fungsi $y = f(x)$.

1. x peubah (variabel) bebas, merupakan lambang yang menyatakan suatu bilangan sebarang di daerah asal fungsi *f*.
2. y peubah (variabel) tak bebas (bergantung pada *x*), merupakan lambang yang menyatakan bilangan di daerah nilai *f*.

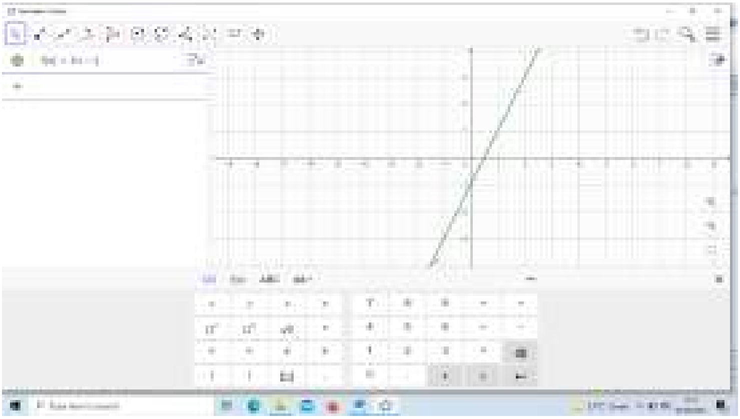
Contoh 3.6

Diketahui $f: A \to B$ dan dinyatakan oleh rumus $f(x) = 2x - 1, x \in R$.

a. Gambarkan grafik $f(x)$
b. Tentukan nilai *f* dari $x = 3$
c. Tentukan $f(-2)$

Penyelesaian:

a. Dengan bantuan *GeoGebra* diperoleh grafik:

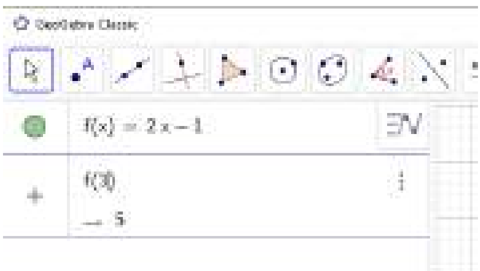


Gambar 11. Grafik $f(x) = 2x - 1, x \in R$

b. Nilai f dari $x = 3$ dapat ditulis $f(3)$. Untuk mendapatkan nilai tersebut, kita cukup memasukkan bilangan 3 pada fungsi *f.*

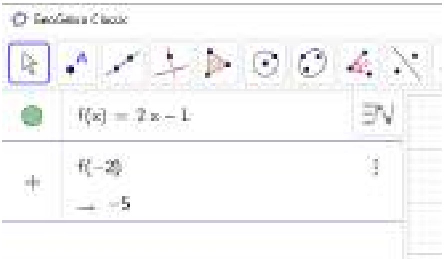
$$f(3) = 2(3) - 1 = 5$$

Kita pun, dapat menentukan nilai f dari 3 dengan bantuan *GeoGebra.*



Gambar 12. Nilai dari $f(3)$

c. $f(-2) = 2(-2) - 1 = -4 - 1 = -5$



Gambar 13. Nilai dari $f(-2)$

1. Penyajian Fungsi

Fungsi dapat disajikan secara verbal (dengan kata-kata), secara numerik (dengan tabel), secara visual (dengan grafik), dan secara aljabar (dengan aturan/rumusan eksplisit).

Contoh 3.7

Berikut diberikan kasus biaya pengiriman barang berdasarkan berat barang yang disajikan secara verbal, secara numerik, secara visual, dan secara aljabar.

a. Penyajian Fungsi Secara Verbal

Biaya pengiriman surat tercatat seberat w ons adalah $B(w)$. aturan yang digunakan kantor pos adalah sebagai berikut. Biaya pengiriman adalah Rp.10.000,- untuk berat sampai 1 ons, ditambah Rp.2.000 untuk setiap ons tambahan sampai 5 ons

b. Penyajian Fungsi Secara Numerik

Biaya pengiriman surat tercatat ditunjukan tabel berikut.

Berat w (ons)	Biaya $B(w)$ (rupiah)
$0 < w \leq 1$	10.000
$1 < w \leq 2$	12.000
$2 < w \leq 3$	14.000
$3 < w \leq 4$	16.000
$4 < w \leq 5$	18.000

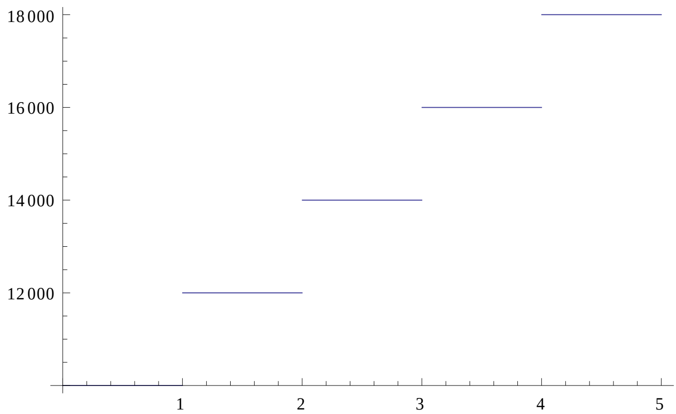
c. Penyajian Fungsi Secara Aljabar

Biaya pengiriman surat tercatat ditunjukkan fungsi berikut

$$B(w) = \begin{cases} 10000, & \text{jika } 0 < w \leq 1 \\ 12000, & \text{jika } 1 < w \leq 2 \\ 14000, & \text{jika } 2 < w \leq 3 \\ 16000, & \text{jika } 3 < w \leq 4 \\ 18000, & \text{jika } 4 < w \leq 5 \end{cases}$$

d. Penyajian Fungsi Secara Visual

Biaya pengiriman surat tercatat ditunjukkan grafik berikut.



2. Jenis-Jenis Fungsi

a. Fungsi Aljabar:

Fungsi f disebut fungsi aljabar jika fungsi tersebut dapat dibuat dengan menggunakan operasi aljabar, yaitu: penambahan, pengurangan, perkalian, pembagian dan penarikan akar, yang dimulai dengan polinom.

Fungsi aljabar mencakup:

1) Fungsi Linear
2) Polinom
3) Fungsi Pangkat
4) Fungsi Akar
5) Fungsi Kebalikan
6) Fungsi rasional

b. Fungsi transenden

Fungsi transenden adalah fungsi yang bukan fungsi aljabar. Fungsi transenden mencakup:

1) Fungsi Trigonometri
2) Fungsi Eksponensial
3) Fungsi Logaritma

3. Operasi Aljabar Fungsi

Misalkan f dan g adalah fungsi dengan daerah asal D_f dan D_g. Fungsi $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$ didefinisikan sebagai berikut.

a. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $\qquad D_{f+g} = D_f \cap D_g$

b. $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ $\qquad D_{f-g} = D_f \cap D_g$

c. $(fg)(x) = f(x)g(x)$ $\qquad D_{fg} = D_f \cap D_g$

d. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ $\qquad D_{f/g} = \{D_f \cap D_g\} - \{x \mid g(x) = 0\}$

Contoh 3.8

Diketahui $f(x) = x^2$ dan $g(x) = x, x \in R$.

Tentukan $f+g, f-g, fg$, dan $\frac{f}{g}$.

Penyelesaian:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + x$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - x$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = x^2x = x^3$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x} = x$$

RANGKUMAN

Himpunan dicirikan oleh sifat objek atau benda yang didalamnya didefinisikan secara jelas. Himpunan dapat dituliskan dengan mendaftar unsur-unsurnya secara eksplisit atau menggunakan ciri penentu atau ciri/ sifat keanggotaan himpunan.

Fungsi muncul jika suatu besaran bergantung pada besaran lain. Fungsi dapat disajikan secara verbal (dengan kata-kata), secara numerik (dengan tabel), secara visual (dengan grafik), dan secara aljabar (dengan aturan/rumusan eksplisit). Secara garis besar, fungsi terdiri dari fungsi aljabar dan fungsi transenden.

SOAL LATIHAN

1. Tuliskan kalimat berikut dalam bentuk himpunan.
    a. Himpunan petani laki-laki dan perempuan.
    b. Himpunan nama-nama pupuk anorganik yang digunakan untuk tanaman padi.
    c. Himpunan faktor-faktor produksi pertanian.
2. Banyaknya pupuk urea yang dibutuhkan per hektar sawah adalah 250 kg". Tulislah pernyataan tersebut dalam bentuk fungsi yang disajikan secara aljabar dan visual (grafik)
3. Berikan contoh fungsi berikut ini dan gambarkan dalam grafik koordinat cartesius (dapat menggunakan *GeoGebra*).
    a. Fungsi Linear
    b. Polinom
    c. Fungsi Pangkat
    d. Fungsi Akar
    e. Fungsi Kebalikan
    f. Fungsi rasional

BAB IV
PEMODELAN MATEMATIKA

Deskripsi Materi

1. Model Matematika
2. Pemodelan Matematika
3. Pemodelan Matematika dengan Bantuan *GeoGebra*

Relevansi

Pemodelan matematika memformulasikan fenomena dalam konteks kehidupan nyata ke dalam notasi matematika dan dapat dimanfaatkan untuk pengambilan keputusan dan memprediksi keadaan di masa yang akan datang. Banyak konteks pertanian yang memerlukan pemecahan masalah yang melibatkan pemodelan matematika.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari BAB ini, mahasiswa dapat memahami perbedaan model dan pemodelan matematika, serta dapat membuat model matematika dengan bantuan *GeoGebra.*

MATERI

A. Model Matematika

Model matematik adalah uraian secara matematik dari fenomena dunia nyata. Banyak fenomena yang dapat dinyatakan dalam suatu model matematika seperti populasi, permintaan suatu barang, kecepatan benda jatuh, konsentrasi hasil dalam reaksi kimia, harapan hidup seseorang pada waktu lahir. Dalam bidang pertanian, seperti banyaknya kebutuhan pupuk, kebutuhan bibit, dan faktor produksi lainnya dapat dinyatakan dalam suatu model matematika.

Fenomena dunia nyata sering kali disebut konteks masalah dalam bidang pendidikan matematika. Oleh karena itu, apabila Anda dihadapkan pada kata konteks atau masalah maka kata tersebut merujuk pada kata fenomena.

Model matematika bertujuan untuk membantu memahami suatu fenomena atau perilaku. Melalui model matematika, kita dapat membuat prakiraan tentang perilaku di masa yang akan datang dan membantu suatu proses perencanaannya. Contohnya adalah model jumlah populasi manusia di suatu daerah. Model tersebut dapat menghasilkan kesimpulan tentang jumlah populasi yang dapat digunakan untuk membantu rencana pengambilan keputusan/kebijakan di masa yang akan datang.

Masalah nyata yang dihadapi seringkali bersifat kompleks. Oleh karena itu model matematika tidak pernah merupakan pernyataan akurat secara lengkap dari situasi fisik. Model yang baik menyederhanakan kenyataan dengan hanya mempertimbangkan faktor-faktor yang relevan dengan tujuan yang diinginkan tetapi cukup akurat untuk memberikan kesimpulan.

Model matematik dinyatakan dalam suatu formula matematika yang terdiri dari simbol-simbol (peubah, parameter, konstanta, fungsi) dan hubungan-hubungannya. Simbol beserta hubungan-hubungannya dapat dimanipulasi berdasarkan kaidah-kaidah logika dan aturan-aturan matematik.

Fenomena dunia nyata sering digambarkan dengan suatu model matematika dalam bentuk fungsi atau persamaan matematika. Model matematika merupakan idealisasi fenomena dunia nyata. Kecocokan model terhadap fenomena nyata tergantung dari ketepatan formulasi persamaan matematik dalam mendeskripsikan fenomena nyata yang digambarkan. Model apapun memiliki keterbatasan, namun model yang terbaik adalah model yang dapat memberikan hasil dan kesimpulan.

B. Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika adalah proses membuat model matematika. Memahami perilaku atau fenomena dari sistem dunia nyata merupakan awal dari pemodelan matematika. Orang yang melakukan pemodelan matematika disebut pemodel.

Pemodel harus mengamati, memahami dan menganalisis berbagai situasi dan efeknya pada sistem dunia nyata. Pemodel harus memahami bagaimana sistem tertentu bekerja, apa yang menyebabkan perubahan dalam sistem, dan seberapa sensitif sistem tersebut mengalami perubahan.

Pemodel harus dapat menghubungkan dua dunia bersama-sama yaitu sistem dunia nyata dan dunia matematika. Sebuah sistem adalah kumpulan dari objek yang tergabung dalam beberapa interaksi reguler dan saling berhubungan.

Pemodelan matematika diawali dari pengamatan fenomena dunia nyata, kemudian merepresentasikan dengan membangun model baru atau memilih model yang sudah ada. Model yang baru dapat diperoleh dari pengumpulan data dengan menggunakan teknik statistik atau *curve fitting* (pencocokkan kurva). Model yang sudah ada dapat berupa model yang sederhana atau model yang kompleks. Kompleksitas disini dapat ditinjau dari variabel yang banyak atau dari penyelesaian model itu sendiri. Model yang sederhana misalnya model kecepatan yaitu perbandingan jarak dan waktu, sedangkan model yang penyelesaiannya kompleks adalah persamaan differensial.

Pengamatan fenomena dunia nyata dapat dilakukan secara langsung (eksperimen/percobaan) atau dengan simulasi. Pengamatan langsung dilakukan dengan eksperimen atau percobaan. Jika kondisi tidak memungkinkan dilakukan secara langsung maka pengamatan dapat dilakukan secara simulasi. Misalnya pemodelan terhadap pengoperasian sistem *lift* pada jam sibuk di pagi hari. Hal ini tidak mungkin dilakukan percobaan secara langsung dikarenakan akan mengganggu pengguna *lift*. Sehingga, hal yang mungkin dilakukan adalah simulasi pengoperasian *lift* dengan bantuan perangkat komputer. Simulasi tersebut diharapkan dapat menghasilkan model terbaik yang dapat mengoperasikan *lift* pada jam sibuk sehingga pengguna *lift* merasa nyaman dan efektif.

Pengamatan dilakukan untuk mengidentifikasi perilaku atau fenomena dunia nyata. Model matematika dapat dibedakan berdasarkan banyaknya identifikasi terhadap fenomena, yaitu:

1. Model matematika yang mengidentifikasikan dan mempelajari beberapa fenomena dunia nyata,
2. Model matematika yang membangun spesifikasi untuk mempelajari fenomena khusus.

Banyak faktor yang mempengaruhi ketika model dibangun. Setiap model yang dibangun memiliki kelebihan dan kekurangan. Apakah sebuah model dapat merepresentasikan realita, apakah biaya proses pemodelan nya mahal, apakah mampu mengontrol kondisi yang mempengaruhi model, kompleksitas analisis dan penyelesaian model. Langkah-langkah pemodelan matematika disajikan dalam Tabel 1 berikut ini.

Tabel 1. Langkah-Langkah Pemodelan Matematika

Langkah-Langkah	Deskripsi
1. Identifikasi Masalah	a. Masalah apa yang akan digali?. b. Mengidentifikasi perubahan fenomena dunia nyata menjadi simbol matematis dan mencari arah penyelesaiannya. c. Mengidentifikasi data yang penting untuk dijadikan rumusan masalah.
2. Membuat asumsi	a. Mengidentifikasi dan mengklasifikasikan variabel. b. Menentukan hubungan timbal balik antara variabel.
3. Membuat model	Model dapat berupa persamaan atau pertidaksamaan yang harus diselesaikan.
4. Verifikasi model	Menguji model: a. Apakah model tersebut mengatasi masalah? b. Apakah model tersebut masuk akal? c. Membandingkan data hasil dari model dengan data di dunia nyata.
5. Menerapkan model	Model digunakan memprediksi atau untuk mengambil keputusan/kebijakan.

Model matematika dapat dibangun dengan beragam aturan yang bergantung pada konteks masalah dan data yang tersedia serta penyelesaian yang ingin dicapai. Hakikatnya setiap aturan pemodelan matematika adalah penyederhanaan realitas. Umumnya, model hanya bisa mendekati perilaku dunia nyata. Proporsionalitas adalah suatu hal yang sangat penting sebagai penyederhanaan dari dunia nyata ke dalam model matematika. Dalam konteks pertanian, proporsionalitas banyak ditemukan karena pada umumnya suatu produksi pertanian bergantung pada faktor produksi.

Proporsionalitas dapat didefinisikan berikut ini:

Dua variabel y dan x adalah proporsional (satu sama lain) jika salah satu merupakan perkalian konstan dari yang lainnya, yaitu jika

$$y = kx$$

untuk suatu k konstanta tak nol. Kita tulis $y \alpha x$.

Definisi di atas mengandung arti bahwa grafik y terhadap x terletak di sepanjang garis lurus melalui titik asal. Pengamatan grafis ini berguna dalam pengujian apakah koleksi data yang diberikan cukup mengasumsikan hubungan proporsionalitas. Jika proporsionalitas tersebut wajar, plot dari satu variabel terhadap yang lain harus mendekati garis lurus yang melalui titik asal. Berikut adalah contoh fenomena di bidang pertanian yang dapat dibuat model matematikanya dengan aturan proporsionalitas.

Misalkan pengamatan terhadap hasil panen padi tahunan. Data dikumpulkan setiap tahunnya dan ditampilkan pada Tabel 2 berikut ini.

Tabel 2. Data Panen Padi

Tahun ke	Kuantitas (ton)
1	1.000
2	1,875
3	2.750
4	3.250
5	4.375
6	4.875
7	5.675
8	6.500
9	7.250
10	8.000
11	8.750

Data menunjukkan hubungan antara tahun dan kuantitas (berat) padi dalam satuan ton. Data tersebut menunjukkan aturan proporsionalitas dari tahun *x* sebanding dengan berat *y*. Jika melihat hubungan antara *x* dan *y* maka garis lurus sepertinya akan dapat melewati titik-titik (*x,y*). Secara simbolis dapat ditulis,

$$y = kx\;.$$

Dapat juga ditulis dalam representasi fungsi,

$$f(x) = kx$$

Pemahaman geometris tersebut memungkinkan kita untuk melihat data tersebut wajar dan masuk akal. Selanjutnya, untuk memperkirakan kemiringan *k*, kita dapat memilih dua titik. Misalnya (5, 4375) dan (10, 8000) dan kita hitung dengan konsep kemiringan yang pernah kita dapatkan di bangku sekolah menengah pertama, yaitu:

$$k = \frac{8000 - 4375}{10 - 5} = 725$$

Jadi, konstanta proporsionalitas adalah 725, kemiringan garis melalui titik asal. Sehingga model yang dihasilkan adalah:

$$y = 725x$$

Kemudian, kita periksa model yang kita peroleh dengan membandingkan hasilnya dengan data sebenarnya. Lengkapi Tabel 3 berikut ini.

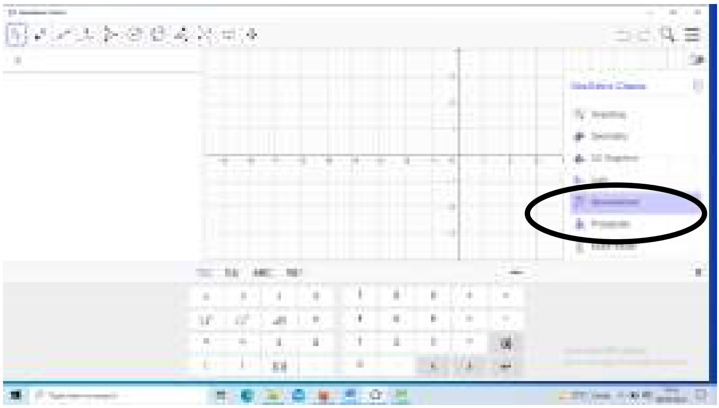
Tabel 3. Pengecekan Model Matematika yang Diperoleh

Tahun	Berat (ton)	Berat (ton) (Hasil dari Model $y = 725x$)
1	1.000	725
2	1,875	1450
3	2.750	2175
4	3.250	2900
5	4.375	3625
6	4.875	4350
7	5.675	5075
8	6.500	5800
9	7.250	6525
10	8.000	7250
11	8.750	7975

Tabel 3 menunjukkan bahwa perbedaan berat yang diperoleh dari model dengan berat dari data asal berbeda. Kemudian timbul pertanyaan, apakah model tersebut merupakan model terbaik? Untuk mendapatkan model yang terbaik kita dapat melihat besar selisih antara data model dengan data asal. Apabila selisihnya cenderung besar, maka kita dapat memilih dua titik lainnya, dan melakukan hal yang sama seperti contoh sebelumnya. Percobaan memilih dua titik yang lainnya dapat terus berlanjut hingga diperoleh model yang terbaik. Namun demikian, tentunya teknik seperti ini kurang efektif. Teknik-teknik pemodelan yang kian berkembang memudahkan kita untuk mendapatkan model terbaik.

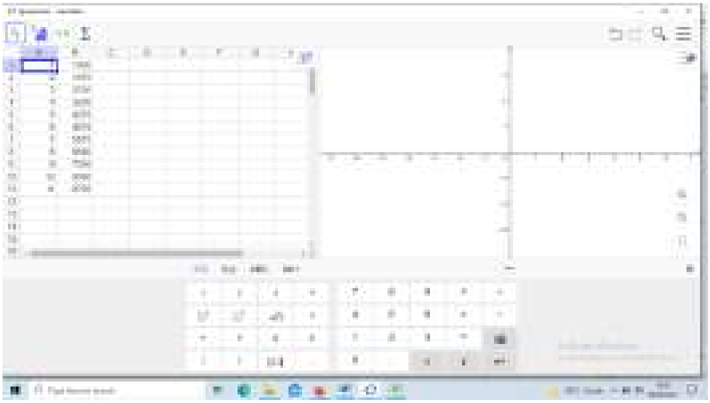
C. Model Matematika

Berikut ini akan dijelaskan alat bantu pemodelan matematika dengan GeoGebra. Langkah pertama, buka GeoGebra dan pilih *spreadsheet*.

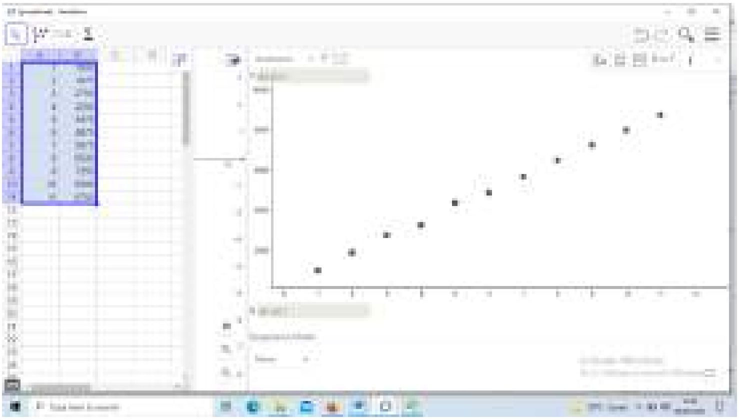


Gambar 14. Tampilan Awal *GeoGebra*

Masukan data pada Tabel 2 ke dalam *cell* di *GeoGebra*. Kemudian blok *cell* yang terisi data pilih *two variable regression analysis*.

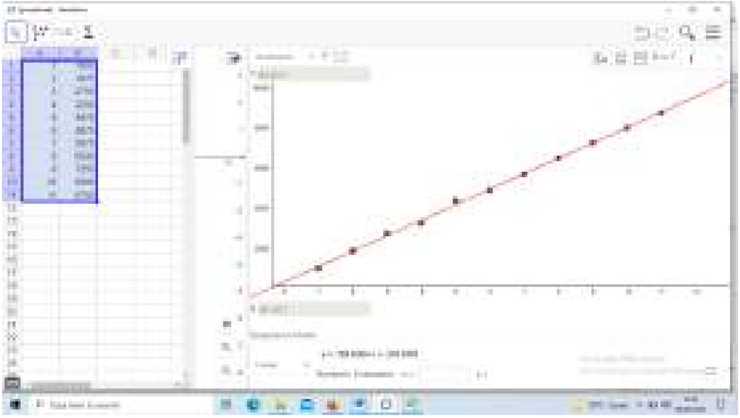


Gambar 15. Memasukan Data



Gambar 16. Memilih Analisis Regresi

Pilih model matematika yang bersesuaian dengan titik-titik data. Dari Gambar 16 dan dari uraian sebelumnya (setelah Tabel 2) kita sudah menduga, bahwa model tersebut adalah model linear. Oleh karena itu, model yang dipilih adalah model linear.



Gambar 17. Model Linear

Dari Gambar 17, kita dapat melihat bahwa model yang diperoleh adalah $y = 769x + 324$ (hasil pembulatan). Mari kita bandingkan dengan model $y = 725x$, manakah model yang terbaik?. $y = 725x$ kita sebut sebagai model 1 dan $y = 769x + 324$ sebagai model 2.

Tabel 4. Perbandingan Model 1 dan 2

Tahun Ke	Berat (ton) Model 1	Error Model 1	Berat (ton) Model 2	Error Model 2
1	725	275	1094	94
2	1450	1.448	1863	1861
3	2175	575	2632	118
4	2900	350	3401	151
5	3625	750	4170	205
6	4350	525	4939	64
7	5075	600	5708	33
8	5800	700	6477	23
9	6525	725	7246	4
10	7250	750	8015	15
11	7975	775	8784	34
		7473		2602

Error adalah selisih antara berat dari data asal (Tabel 4.2) dengan berat yang diperoleh dari model. Jika melihat Tabel 44, maka jumlah *error* yang dimiliki oleh model 2 cenderung lebih sedikit dibandingkan dengan model 1. Model regresi merupakan model kuadrat terkecil yang di klaim sebagai model terbaik dan akan dipelajari lebih lanjut pada mata kuliah statistika.

Apakah model matematika hanya terdiri dari model linear? Tentunya model yang ditetapkan bergantung dari trend data itu sendiri. Contoh lain model matematika dalam bentuk fungsi adalah sebagai berikut:

1. Polinom
2. Fungsi pangkat
3. Fungsi rasional
4. Fungsi aljabar
5. Fungsi trigonometri
6. Fungsi eksponensial
7. Fungsi logaritma
8. Fungsi transenden

Kumpulan titik dari data yang kita miliki dapat diamati/dianalisis untuk kemudian ditentukan model matematikanya. Dalam hal ini, ada tiga hal yang harus diperhatikan:

1. Sesuaikan jenis model yang dipilih atau jenis data.
2. Pilih model yang paling cocok dari berbagai jenis model yang telah dicoba.
3. Buat prediksi dari data yang dikumpulkan.

Data-data yang bersifat diskrit seperti contoh hasil panen padi merupakan data diskrit. Data diskrit dapat dibuat *continuum* melalui proses *curve-fitting* (pencocokan kurva).

Curve-fitting merupakan proses data-*smoothing*, yakni proses pendekatan terhadap kecenderungan data-data dalam bentuk persamaan model matematika. Nah, pemodelan yang telah kita lakukan sehingga diperoleh model 2 tersebut merupakan proses pencocokan kurva.

Seperti yang sudah dijelaskan sebelumnya bahwa model matematika dapat diperoleh dari beragam aturan matematika. Secara sederhana, kita sudah terbiasa membuat model matematika dari konteks tertentu di sekolah dasar dan menengah. Biasanya, siswa mengenal model matematika pada materi sistem persamaan linear dan program linear. Pada pembahasan tersebut, biasanya guru secara eksplisit menyatakan strategi penyelesaian dengan membuat model matematika sebelum metode penyelesaian ditetapkan. Namun demikian, sekarang kita lebih luas lagi memahami tentang model matematika dan pemodelan matematika.

Selanjutnya, kenapa kita melakukan pemodelan matematika? Pada Tabel 1 disebutkan bahwa model matematika dapat digunakan untuk memprediksi suatu fenomena. Dalam kasus hasil panen padi, petani dapat memprediksi hasil panen pada beberapa tahun yang akan datang. Namun demikian, harus asumsi yang ditetapkan untuk model ini. Misal keadaan iklim tetap, tidak ada serangan hama, atau keadaan-keadaan lainnya. Karena model tidak akan berlaku jika terjadi kejadian yang luar biasa. Jika kejadian-kejadian tersebut ingin diikutsertakan dalam suatu model matematika, maka harus ditambahkan variabel lainnya. Kembali ke kasus hasil panen padi, misalnya petani ingin memprediksi hasil panen di tahun ke 50, maka petani dapat menghitung dengan menggunakan model 2 sebagai berikut:

$$y = 769\ (50) + 324 = 38775$$

Jadi, di tahun ke 50 dapat diprediksikan bahwa hasil panen yang akan diperoleh adalah 38.775 ton.

RANGKUMAN

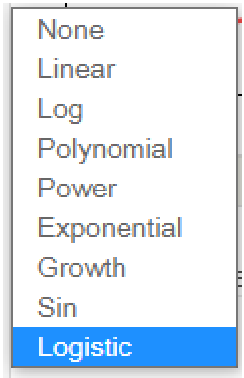
Model matematik adalah uraian secara matematik dari fenomena dunia nyata. Model matematika yang baik adalah model yang memiliki *erorr* paling kecil antara data dengan hasil dari model. Langkanh-langkah pemodelan matematika adalah mengidentifikasi masalah, membuat asumsi, membuat model, verifikasi model, dan menerapkan model. Pemodelan matematika pada tahap membuat model dapat dilakukan menggunakan bantuan *GeoGebra*.

SOAL LATIHAN

1. Sebutkan fenomena-fenomena di bidang pertanian yang dapat dibuat model matematika. Sebutkan model matematika dari fenomena tersebut dan langkah-langkah pemodelan yang mungkin dapat dilakukan.
2. Berikut ini merupakan data berat badan seekor ternak yang ditimbang pada setiap awal bulan.

Bulan Ke	Berat (ons)
1	2
2	5
3	17
4	50
5	65
6	80
7	100
8	150
9	155
10	154
11	159
12	156

Lakukan pemodelan matematika dari data tersebut dengan bantuan *GeoGebra*. Pada *GeoGebra* terdapat pilihan model diantaranya:



a. Pilihlah model yang terbaik.
b. Jelaskan kenapa Anda memilih model tersebut.
c. Tulislah model yang Anda pilih tersebut (tulis dari output *Geogebra* tanpa pembulatan)
d. Prediksikan berat ternak tersebut pada bulan ke 17.

BAB V
SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Deskripsi Materi

1. Persamaan Linear
2. Sistem Persamaan Linear

Relevansi

Persamaan dan sistem persamaan banyak digunakan sebagai representasi dari fenomena-fenomena di bidang pertanian. Analisis faktor produksi pertanian banyak melibatkan persamaan linear di dalamnya.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari BAB ini, mahasiswa dapat merepresentasikan konteks masalah ke dalam bentuk persamaan linear (aljabar dan grafik), serta menyelesaikan persamaan dan sistem persamaan linear dengan bantuan *GeoGebra.*

Materi

A. Persamaan Linear

Suatu persamaan linear dalam n variabel adalah persamaan dengan bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

di mana $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan b adalah bilangan-bilangan real dan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah variabel.

Pada tingkat sekolah menengah, kita sudah mempelajari persamaan linear satu, dua, dan tiga variabel. Untuk $x, y, z \in R$, contoh persamaan linear satu variabel:

$$2x = 6$$

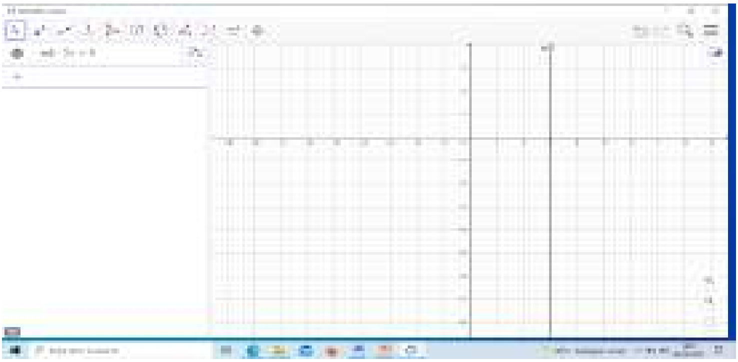
Contoh persamaan linear dua variabel:

$$x + 3y = 7$$

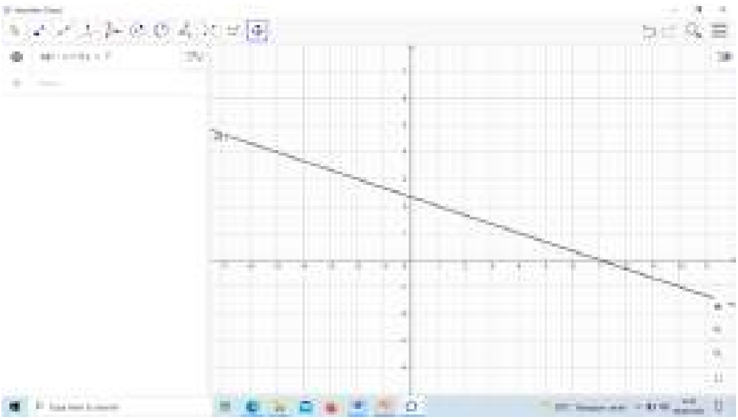
Contoh persamaan linear tiga variabel:

$$2x + 3y - z = 12$$

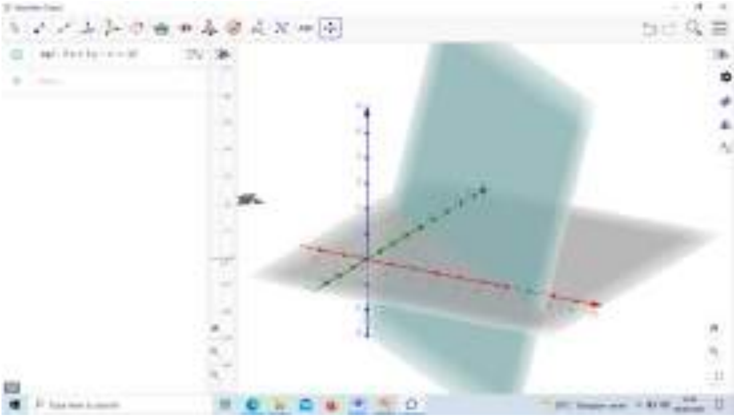
Ketiga persamaan tersebut dapat digambarkan secara berturut-turut dalam grafik seperti berikut ini.



Gambar 18. $\boldsymbol{2x = 6, x \in R}$



Gambar 19. $\boldsymbol{2\,x + 3y = 7, x \in R}$



Gambar 20. $\boldsymbol{2x + 3y - z = 12, x \in R}$

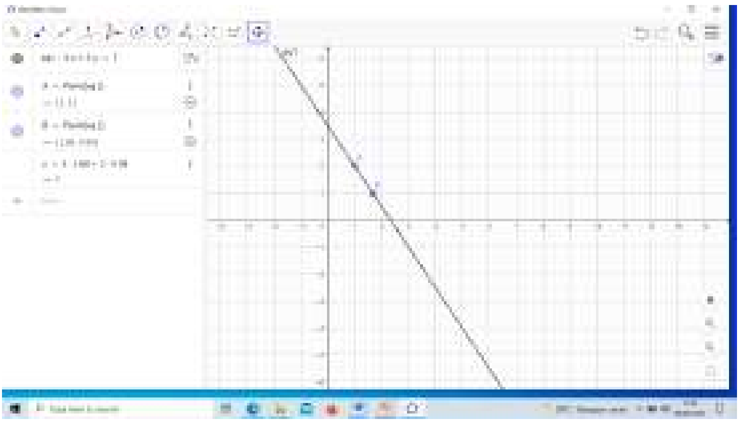
Secara kontekstual, suatu kalimat mungkin saja dapat direpresentasikan ke dalam bentuk persamaan linear. Misalnya, seorang petani membutuhkan dua jenis pestisida merek A dan B. Petani membeli 3 buah pestisida A dan 2 buah pestisida B seharga 7 dolar. Buatlah model matematika yang merepresentasikan pernyataan-pernyataan tersebut.

Kita dapat membuat model matematika dalam bentuk aljabar dengan cara menentukan variabel pada kalimat-kalimat tersebut. Kita misalkan x adalah harga pestisida A dan y adalah harga pestisida B sehingga diperoleh persamaan,

$$3x + 2y = 7, x, y \in R.$$

Lantas, berapakah harga satu pestisida A dan B? Untuk mengetahui berapa harga keduanya, dalam matematika dikenal dengan istilah penyelesaian. Dalam konteks ini penyelesaian persamaan linear $3x + 2y = 7$, $x, y \in R$ yaitu mencari nilai x dan y sedemikian sehingga memenuhi persamaan tersebut. Karena x dan y merupakan bilangan real maka penyelesaiannya adalah seluruh bilangan real yang memenuhi persamaan tersebut. Dapatkah Anda menyebutkan penyelesaiannya? Apakah jawabannya tunggal? Tentu saja tidak kan? Karena ada banyak pasangan x dan y yang memenuhi persamaan tersebut.

Sebagai contoh, $x = 1$ dan $y = 2$ memenuhi persamaan $3x + 2y = 7$ karena $3(1) + 2(2) = 7$. Contoh lainnya adalah $x = 1{,}68$ dan $y = 0{,}98$ memenuhi $3x + 2y = 7$ karena $3(1{,}68) + 2(0{,}98) = 7$. Kedua contoh tersebut dapat ditunjukkan dalam Gambar 21 baik secara komputasi (sebelah kiri) maupun secara grafik (sebelah kanan). Titik (x,y) tersebut yaitu (1,2) dan (1,68;0,98) merupakan titik-titik yang berada pada garis $3x + 2y = 7$. Oleh karena itu, penyelesaian persamaan linear secara grafis merupakan pasangan titik-titik yang berada pada garis atau kurva.



Gambar 21. Contoh Penyelesaian Persamaan $3x + 2y = 7, x, y \in R$

Bagaimana kalau persamaan $3x + 2y = 7$ dengan $x, y \in Z^+$? Tentunya penyelesaiannya sangat terbatas hanya pada bilangan bulat positif saja. Berdasarkan Gambar 5.4 dapat dilihat bahwa hanya titik (1,2) yang memenuhi persamaan $3x + 2y = 7, x, y \in Z^+$. Ini berarti bahwa penyelesaiannya tunggal.

Dapat disimpulkan bahwa penyelesaian suatu persamaan bergantung pada domain nya. Hal ini memberi konsekuensi bahwa suatu persamaan dapat memiliki penyelesaian tunggal, banyak penyelesaian, dan tidak memiliki penyelesaian.

Selain itu, perlu ditegaskan lagi bahwa persamaan linear tidak hanya sebatas tiga variabel karena dalam fenomena dunia nyata melibatkan banyak variabel. Misalnya di bidang pertanian, suatu biaya produksi pertanian dipengaruhi oleh faktor seperti pupuk, bibit, air, pestisida, tenaga kerja, pH tanah. Artinya ada enam variabel yang mempengaruhi biaya produksi.

B. Sistem Persamaan Linear

Suatu sistem persamaan linear dari sebanyak m persamaan dan n variabel disebut sebagai sistem persamaan linear $m \times n$ yang dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\vdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

di mana a_{ij} dan b_i adalah bilangan-bilangan real.

Sistem persamaan linear 2×2 dikenal dengan sebutan sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV). Bentuk umum SPLDV sebagai berikut.

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

Sistem persamaan linear 3×3 dikenal dengan sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV). Bentuk umum SPLDV sebagai berikut.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{3}$$

Penyelesaian sistem persamaan linear $m \times n$ adalah sebuah tupel- n terurut bilangan $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yang memenuhi semua persamaan dalam sistem. Terdapat dua kemungkinan penyelesaian sistem persamaan linear. Pertama, sistem persamaan linear tidak memiliki penyelesaian (sistem *tak-konsisten*). Kedua, sistem persamaan memiliki penyelesaian (sistem *konsisten*). Pada sistem *konsisten*, penyelesaian memiliki paling sedikit satu penyelesaian atau tak berhingga banyak penyelesaian.

Himpunan semua penyelesaian dari sistem persamaan linear disebut himpunan penyelesaian dari sistem. Jika sistem *tak-konsisten* maka himpunan penyelesaian adalah himpunan kosong, sedangkan sistem *konsisten* akan memiliki suatu himpunan penyelesaian.

Metode penyelesaian sistem persamaan linear pada setiap jenjang berbeda-beda. Metode dasar yang diperkenalkan pada tingkat SMP digunakan untuk menyelesaian SPLDV, yaitu metode grafik, eliminasi, substitusi dan campuran (eliminasi-substitusi). Selanjutnya, pada tingkat SMA ditambah dengan metode penyelesaian SPLTV, yaitu eliminasi, substitusi, *Crammer*, dan invers matriks. Pada jenjang perguruan tinggi, banyak metode yang dibahas untuk menyelesaikan sistem persamaan linear $m \times n$. Hal ini dilakukan untuk mendapatkan metode yang efisien untuk m dan n yang besar. Misalkan metode eliminasi Gauss, *forward Substitution*, *LU decomposition* dan sebagainya.

Penyelesaian sistem persamaan linear pada buku ini menggunakan *GeoGebra*. Perhatikan contoh berikut ini.

Pak Adlyn dan Pak Amru pergi ke toko pupuk. Pak Adlyn membeli 3 kg pupuk urea dan 1 liter pestisida, ia harus membayar Rp.18.000,-. Pak Amru membeli 2 kg pupuk urea dan 2 liter pestisida, ia harus membayar Rp.16.000,-. Tentukan harga satu kilogram pupuk urea dan satu liter pestisida.

Langkah pertama penyelesaian masalah di atas adalah dengan membuat model matematikanya. Misalkan x adalah harga pupuk urea dan y adalah harga pestisida.

Persamaan linear pertama dengan $a_{11} = 3, a_{12} = 1, b_1 = 18000$ adalah

$$3x + y = 18000$$

Persamaan linear kedua dengan $a_{21} = 2, a_{22} = 2, b_2 = 16000$ adalah

$$2x + 2y = 16000$$

Sehingga diperoleh sistem persamaan linear:

$$\begin{aligned} 3x + y &= 18000 \\ 2x + 2y &= 16000 \end{aligned} . \qquad (4)$$

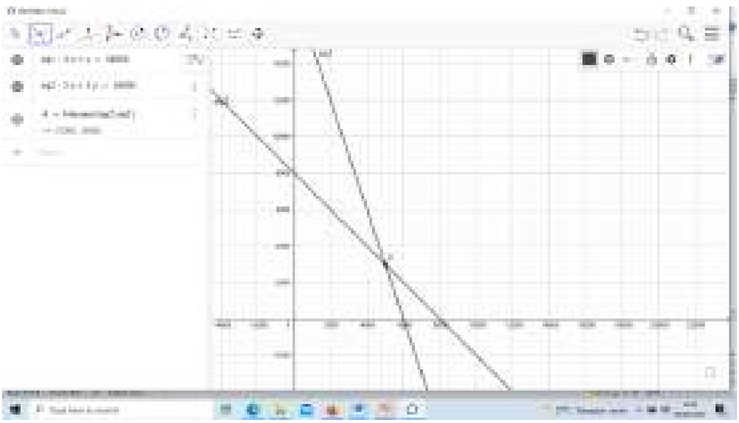
Persamaan (4) merupakan sistem persamaan linear dua variabel.

Untuk mendapatkan harga satu kilogram pupuk urea dan harga satu liter pestisida dapat menggunakan bantuan *Geogebra*. Buka *GeoGebra* dan pilih CAS. Masukan persamaan

(4) dengan sintaks "*solve*" seperti pada Gambar 22 berikut ini.

Gambar 22. Penyelesaian SPLDV pada CAS

Penyelesaian persamaan (4) juga dapat diidentifikasi dari grafik seperti yang ditunjukkan pada Gambar 23 berikut ini.



Gambar 23. Penyelesaian SPLDV dengan Metode Grafik

Hasil yang ditunjukkan kedua teknik penyelesaian tersebut adalah sama yaitu (5000,3000). Ini berarti bahwa harga satu kilogram pupuk urea adalah 5000 rupiah dan harga satu liter pestisida adalah 3000 rupiah. Hasil ini sekaligus menunjukkan bahwa penyelesaian kasus ini adalah tunggal (satu-satunya penyelesaian). Apakah suatu sistem persamaan dapat memiliki banyak penyelesaian atau bahkan sama sekali tidak memiliki penyelesaian?. Perhatikan contoh kasus berikut ini

Cairan bensin mudah terbakar di atmosfer. Jika suatu benda dingin ditempatkan langsung diatas bensin maka air akan memadat pada benda itu dan suatu lapisan karbon juga akan terbentuk pada benda itu. Persamaan kimia untuk reaksi ini berbentuk

$$x_1C_6H_6 + x_2O_2 \rightarrow x_3C + x_4H_2O$$

Tentukan x_1, x_2, x_3, x_4 untuk menyeimbangkan persamaan

Penyelesaian kasus ini menggunakan prinsip keseimbangan antara ruas kiri dan ruas kanan. Supaya persamaan ini seimbang, maka kita harus memilih x_1, x_2, x_3, x_4 sehingga banyaknya atom-atom karbon, hidrogen dan oksigen adalah sama pada setiap ruas dari persamaan.

Untuk atom karbon (C) diperoleh persamaan:

$$6x_1 = x_3$$

Untuk atom oksigen (O) diperoleh persamaan:

$$2x_2 = x_4$$

Untuk atom hidrogen (H) diperoleh persamaan:

$$6x_1 = 2x_4$$

Dengan bantuan *GeoGebra* diperoleh penyelesaian:

Gambar 24. Penyelesaian Sistem Persamaan Cairan Bensin

Selanjutnya, Kita ambil sebarang bilangan bulat tak negatif, misalnya

$x_4 = 6$

Maka

$$x_1 = \frac{1}{3}(6) = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(6) = 3$$

$$x_3 = 2(6) = 12$$

Sehingga, reaksi kimia tersebut menjadi:

$$2C_6H_6 + 3O_2 \rightarrow 12C + 6H_2O$$

Silahkan beri contoh selainnya

RANGKUMAN

Suatu persamaan linear dalam n variabel adalah persamaan dengan bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

di mana $a_1, a_2, ..., a_n$ dan b adalah bilangan-bilangan real dan $x_1, x_2, ..., x_n$ adalah variabel.

Penyelesaian persamaan linear n variabel adalah nilai-nilai $x_1, x_2, ..., x_n$ yang memenuhi semua persamaan dalam sistem.

Suatu sistem persamaan linear dari sebanyak m persamaan dan n variabel disebut sebagai sistem persamaan linear $m \times n$ yang dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\
&: \\
&. \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}$$

di mana a_{ij} dan b_i adalah bilangan-bilangan real.

Penyelesaian sistem persamaan linear $m \times n$ adalah sebuah tupel- n terurut bilangan $(x_1, x_2, ..., x_n)$ yang memenuhi semua persamaan dalam sistem.

SOAL LATIHAN

1. Biaya suatu produksi tanaman jagung dinyatakan dalam suatu persamaan. Seorang petani memerlukan tiga komponen produksi dengan biaya 500.000 rupiah yaitu untuk membayar upah 3 orang tenaga kerja, membeli 5 kilogram pupuk kandang, dan 2 kilogram benih jagung. Buatlah pernyataan tersebut dalam sebuah persamaan linear. Tentukan kemungkinan harga dari tiga komponen tersebut.
2. Misalkan diberikan persamaan permintaan dan penawaran berturut-turut berikut ini.

$$\begin{cases} q = 200 - 4p \\ q = 100 + 4p \end{cases}$$

   Jika p menunjukkan harga pasar dan q menunjukkan permintaan atau penawaran, maka tentukan harga pasar dan nilai keseimbangan permintaan dan penawaran.
3. Seorang petani memiliki lima lahan dengan kondisi yang berbeda-beda. Kelima lahan tersebut akan ditanami cabai dan memerlukan empat komponen yaitu pupuk, pestisida, tenaga kerja, dan benih. Lahan pertama memerlukan 1 kg pupuk, 1 liter pestisida, 1 orang tenaga kerja, dan 1 kg benih dengan biaya Rp.135.000,-. Lahan kedua memerlukan 2 kg pupuk, 1 liter pestisida, 3 orang tenaga kerja, dan 1 kg benih dengan biaya Rp.260.000,-. Lahan ketiga memerlukan 2 kg pupuk, 1 liter pestisida, 5 orang tenaga kerja, dan 2 kg benih dengan biaya Rp.430.000,-. Lahan keempat memerlukan 1 kg pupuk, 1 liter pestisida, 4 orang tenaga kerja, dan 2 kg benih dengan biaya Rp.365.000,-. Tentukan biaya lahan kelima jika diperlukan 3 kg pupuk, 1 liter pestisida, 10 orang tenaga kerja, dan 3 kg benih.

4. Dalam proses fotosintesis tumbuh-tumbuhan menggunakan energi terpancar dari sinar matahari untuk mengubah karbon dioksida (CO_2) dan air (H_2O) menjadi glukosa ($C_6H_{12}O_6$) dan oksigen (O_2). Persamaan kimia dari reaksi ini berbentuk:

$$x_1CO_2 + x_2\,H_2O \rightarrow x_3O_2 + x_4C_6H_{12}O_6.$$

(Lay, D.C.,2012)

Tentukan x_1, x_2, x_3, x_4.

Rumah Cemerlang

BAB VI
PEMODELAN OPTIMASI

Deskripsi Materi
1. Pertidaksamaan Linear
2. Sistem Pertidaksamaan Linear
3. Model Matematika
4. Pemodelan Optimasi

Relevansi

Pemodelan Optimasi banyak dimanfaatkan di bidang pertanian. Misalnya Optimasi biaya faktor-faktor produksi. Pemodelan Optimasi ini sering disebut sebagai pemrograman linear atau program linear.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari BAB ini, mahasiswa dapat memahami pertidaksamaan dan sistem pertidaksamaan, membuat model matematika dan menentukan nilai optimum dari suatu konteks masalah dengan bantuan *GeoGebra*.

Materi

A. Pertidaksamaan Linear

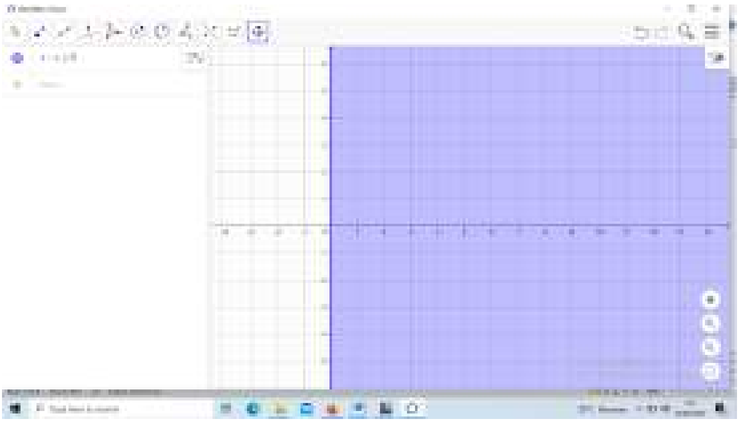
Mari kita perhatikan ekspresi aljabar berikut ini. Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$,

1. $x \geq 0$
2. $x + y = 0$
3. $2x + 3y = 6$
4. $2x + 3y \leq 6$
5. $y = 2$
6. $5x + y = 5$

7. $5x + y > 5$
8. $x + y = 3$
9. $x + y < 3$

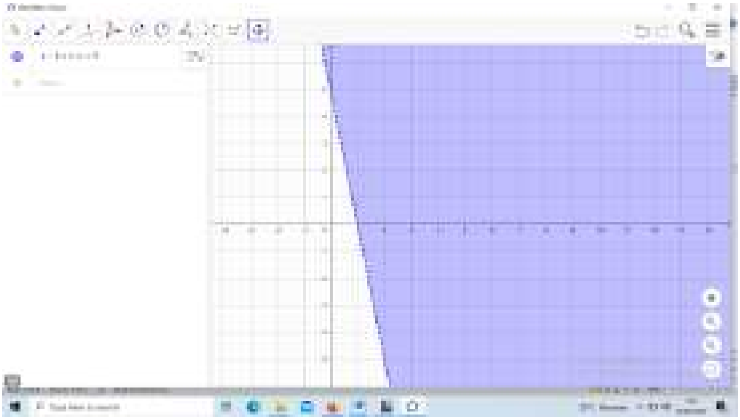
Ekspresi manakah yang termasuk persamaan? Ekspresi manakah yang termasuk pertidaksamaan? Tentunya Anda dapat dengan mudah mengidentifikasinya.

Sekarang kita ambil pertidaksamaan $x \geq 0$. Bagaimana representasi grafiknya dalam koordinat kartesius? Perhatikan Gambar 25 berikut ini.



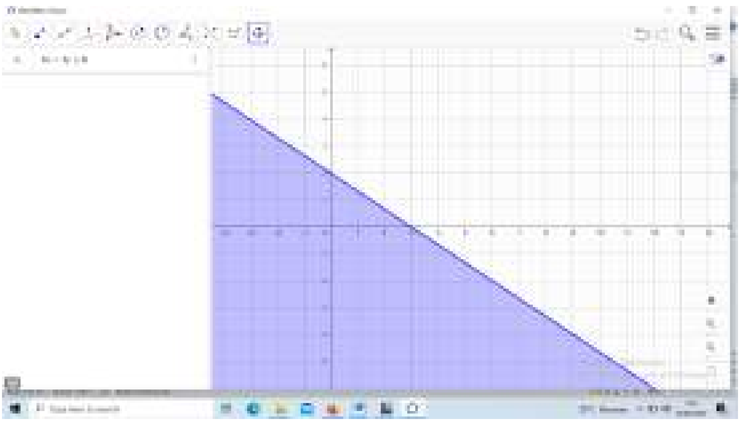
Gambar 25. Grafik $x \geq 0, x, y \in \mathbb{R}$

Kemudian kita ambil $5x + y > 5$. Perhatikan grafiknya pada Gambar 26.



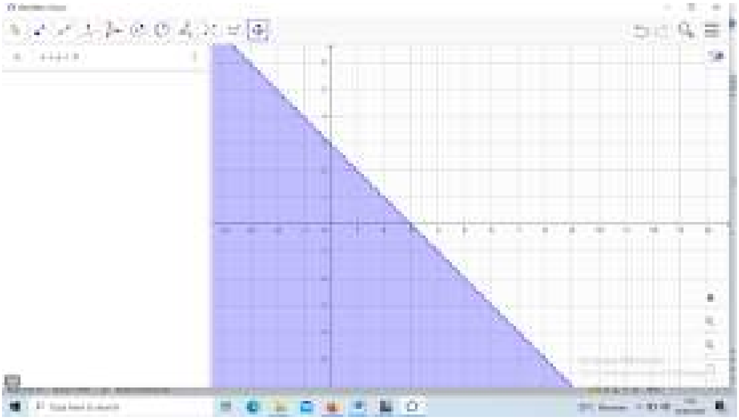
Gambar 26. Grafik $5x + y > 5, x, y \in \mathbb{R}$

Kemudian kita ambil $2x + 3y \leq 6$. Perhatikan grafiknya pada Gambar 27.



Gambar 27. Grafik $2x + 3y \leq 6, x, y \in \mathbb{R}$

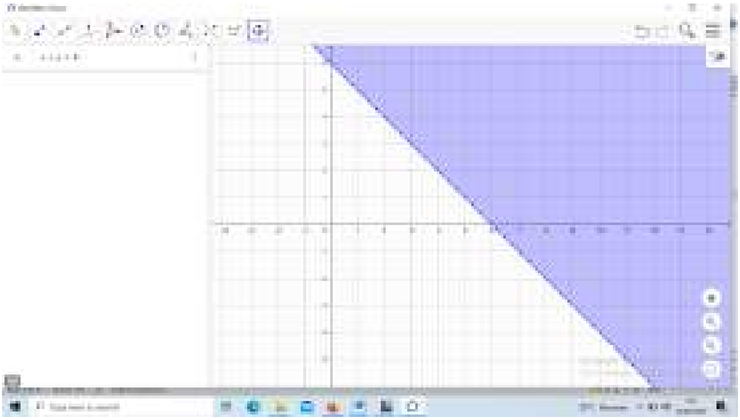
Kemudian kita ambil $x + y < 3$. Perhatikan grafiknya pada Gambar 28.



Gambar 28. Grafik $x + y < 3$, $x, y \in \mathbb{R}$

Setelah Anda memperhatikan keempat bentuk pertidaksamaan dan grafiknya, apa yang dapat Anda simpulkan?

Selanjutnya, Tentukan niai x yang memenuhi $x + y > 6$ dengan $x, y \in R$. Tentunya dengan mudah kita dapat menyebutkan $x = 3$ dan $y = 4$ atau $x = 10$ dan $y = 13$ atau $x = 7{,}5$ dan $y = 8{,}25$ dan tentunya masih banyak lagi bilangan yang memenuhi pertidaksamaan tersebut. Oleh karena itu penyelesaian pertidaksamaan $x + y > 6$ dengan $x, y \in R$ digambarkan dalam koordinat kartesius dalam suatu wilayah atau daerah seperti pada Gambar 29 yaitu daerah yang diarsir.



Gambar 29. Grafik $x + y < 3, x, y \in \mathbb{R}$

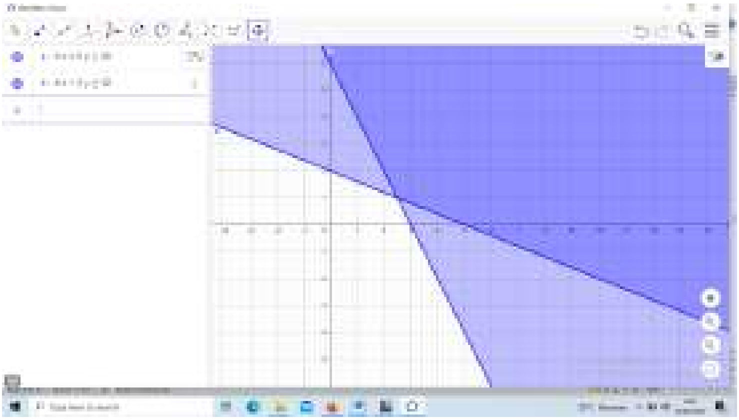
Kesimpulan: himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear merupakan semua titik yang memenuhi pertidaksamaan.

B. Sistem Pertidaksamaan Linear

Sistem pertidaksamaan linear merupakan gabungan dari dua atau lebih pertidaksamaan linear. Sebagai contoh, perhatikan sistem pertidaksamaan linear berikut ini.

$$\begin{cases} 2x + 5y \geq 10 \\ 4x + 2y \geq 12 \end{cases} \text{dengan } x, y \in \mathbb{R}.$$

Mari kita perhatikan grafik pertidaksamaannya pada Gambar 30 berikut ini.



Gambar 30. $\mathbf{4x + 2y \geq 12, 2x + 5y \geq 10, x, y \in \mathbb{R}}$

Berdasarkan Gambar 30 tersebut, manakah yang termasuk penyelesaiannya? Ya, Anda tepat. Semua titik pada bidang yang terarsir oleh kedua pertidaksamaan merupakan penyelesaiannya. Artinya, semua titik yang memenuhi kedua pertidaksamaan tersebut merupakan himpunan penyelesaian.

C. Model Matematika

Model matematika merupakan fungsi atau persamaan/pertidaksamaan yang merupakan representasi dari kalimat (kata-kata). Perhatikan contoh berikut ini.

"Seorang petani berencana melakukan budidaya buah-buahan. Ia memiliki modal usaha sebesar Rp. 3.000.000,-. Ia akan membeli dua jenis bibit buah, yaitu apel dan jeruk. Harga bibit masing-masing apel dan jeruk adalah Rp. 20.000,- dan Rp. 10.000,-."

Kalimat tersebut dapat di buat model matematika, yaitu:

$$20.000x + 10.000y \leq 3.000.000$$
$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Dengan x adalah banyaknya bibit apel dan y adalah banyaknya bibit jeruk. Kenapa ada tambahan pertidaksamaan
$x \geq 0$ dan $y \geq 0$? Dapatkah Anda menjelaskannya?

Seperti yang sudah dijelaskan pada BAB sebelumnya tentang pemodelan matematika, bahwa setiap model yang dibangun memiliki asumsi tersendiri. Tentunya asumsi tersebut harus masuk akal. Asumsi yang dibangun pada permasalahan tersebut karena x dan y tidak mungkin bernilai negatif, serta x atau y bisa saja 0, artinya petani memutuskan untuk tidak membeli salah satu atau kedua bibit tersebut.

D. Pemodelan Optimasi

Pemodelan Optimasi merupakan sarana untuk memaksimumkan atau meminimumkan suatu konteks masalah. Perhatikan permasalahan berikut ini.

Seseorang memanfaatkan hasil panen pisang untuk memproduksi roti pisang dan berencana menjualnya. Orang tersebut memiliki persediaan tepung sebanyak 2,25 kilogram dan mentega sebanyak 1,5 kilogram. Ia ingin membuat dua jenis roti, yaitu roti pisang keju dan roti pisang coklat. Roti pisang keju membutuhkan 150 gram tepung dan 50 gram mentega, sedangkan roti pisang coklat membutuhkan 75 gram tepung dan 75 gram mentega. Keuntungan yang diperoleh dari masing-masing roti pisang keju dan roti pisang coklat adalah Rp. 750,- dan Rp. 1.000,-. Tentukan banyaknya roti pisang keju dan roti pisang coklat supaya pendapatan orang tersebut maksimum.

Permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan pemodelan optimasi atau biasanya disebut pemrograman linear atau program linear. Pernyataan-pernyataan tersebut dapat dibuat menjadi beberapa bentuk fungsi. Ada dua istilah utama dalam Optimasi yaitu fungsi kendala dan fungsi objektif. Dalam kasus tersebut fungsi kendala adalah adanya keterbatasan sumber daya yaitu ketersediaan tepung dan mentega. Di sisi lain ada fungsi objektif, dalam hal ini fungsi yang dapat menunjukkan keuntungan yang dapat diperoleh.

Misalnya, x adalah banyaknya roti pisang keju dan y adalah banyaknya roti pisang coklat. Banyaknya tepung dan mentega terbatas sehingga dapat dibentuk menjadi fungsi kendala dalam konteks ini pertidaksamaan linear yang dapat dibangun dari kebutuhan tepung dan kebutuhan mentega dalam satuan ons. Dengan demikian, fungsi kendalanya adalah sebagai berikut:

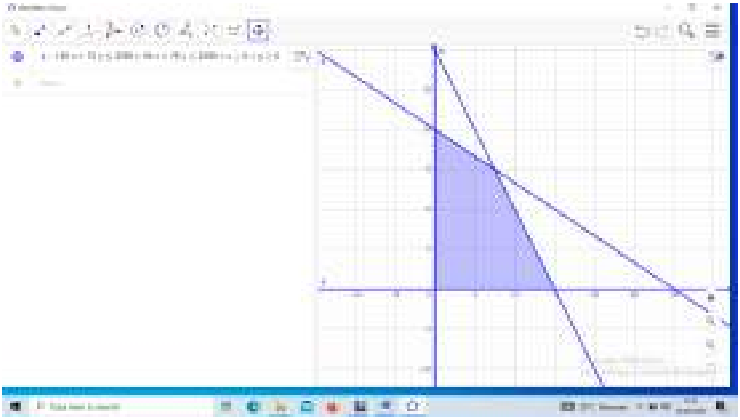
$$150x + 75y \leq 2250$$
$$50x + 75y \leq 1500$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Fungsi objektif:

$$f(x, y) = 750x + 1000y$$

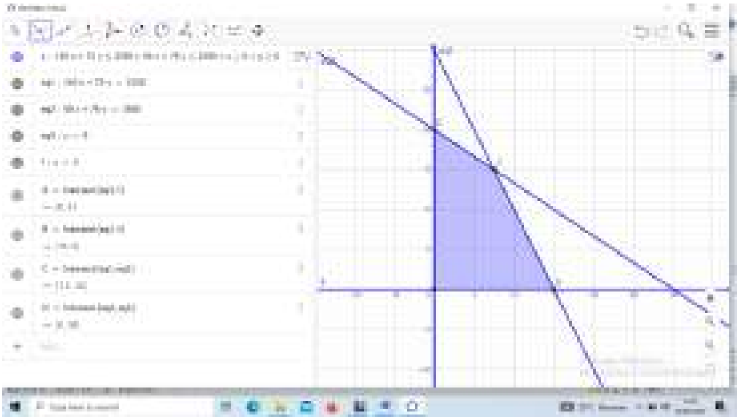
Dapatkah Anda menjelaskan alasan kenapa fungsi kendala dan fungsi objektif dapat terbentuk seperti itu?

Melalui bantuan GeogGebra kita dapat menyelesaikan permasalahan tersebut. Pertama kita masukkan fungsi kendala ke dalam GeoGebra sehingga tampak daerah yang memenuhi pertidaksamaan yaitu daerah yang terarsir oleh keempat pertidaksamaan tersebut. Daerah tersebut diperlihatkan pada Gambar 31 berikut ini.



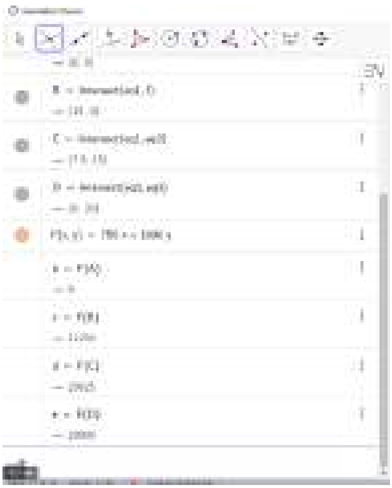
Gambar 31. Grafik $150x + 75y \leq 2250, 50x + 75y \leq 1500, x \geq 0, y \geq 0$

Gambar 31 menunjukkan bahwa daerah penyelesaiannya adalah daerah yang di arsir. Artinya nilai yang akan menunjukkan banyaknya roti keju dan coklat yang dapat diproduksi sehingga menghasilkan nilai maksimum ada pada daerah tersebut. Tapi nilai yang paling maksimum berapa? Di tingkat SMA kita diajarkan tentang optimasi menggunakan titik pojok. Masih ingat bukan? Mari kita gunakan teknik titik pojok. Teknik ini mengklaim bahwa nilai optimum (maksimum atau minimum) ada di titik-tik pojok dari daerah penyelesaian yaitu titik A, B, C, dan D. Untuk mempermudah mendapatkan titik-tik pojok tersebut diperlukan bantuan persamaan (batas daerah pertidaksamaan). Perhatikan Gambar 32. Titik-titik pojok A, B, C, dan D tersebut diperoleh dari irisan garis yang merupakan titik potong garis.



Gambar 32. Garis Batas dan Titik Pojok

Berdasarkan *output GeoGebra* pada Gambar 32, diperoleh titik pojok A(0,0), B(15,0), C(7,5;15), dan D(0,20). Titik-titik tersebut disubstitusikan pada fungsi objektif dan diperoleh nilai seperti pada Gambar 6.10 berikut ini.



Gambar 33. Nilai Fungsi Objektif dari Titik Pojok

Berdasarkan Gambar 33 dapat dilihat bahwa nilai maksimum terjadi pada titik C. Dengan demikian, untuk mendapatkan keuntungan maksimum, orang tersebut harus memproduksi 7 roti pisang keju dan 15 roti pisang coklat.

RANGKUMAN

Ada empat operator pertidaksamaan yaitu $>, \geq, <, \leq$. Misalnya pertidaksamaan linear secara umum dapat dituliskan sebagai $ax + by \geq c$ dengan $a, b, x, y \in R$. Sistem pertidaksamaan linear merupakan gabungan dari beberapa pertidaksamaan linear. Penyelesaian pertidaksamaan linear pada grafik dapat dinyatakan sebagai suatu daerah yang diarsir. Pemodelan Optimasi merupakan sarana untuk menganalisis nilai optimum dari suatu fungsi objektif yang dikenai oleh fungsi kendala.

SOAL LATIHAN

a. Berikan contoh pertidaksamaan linear dengan operator $>, \geq, <, \leq$. Gambarkan grafiknya (dapat menggunakan *GeoGebra*).

b. Diberikan

$$8x + 6y \leq 48$$
$$4x + y \leq 20$$
$$y \geq 5$$
$$x, y \geq 0$$

Tentukan nilai maksimum dari $f(x, y) = 10x + 35y$

c. Sebuah lahan memiliki kapasitas lubang tanam lebih dari 48 lubang. Petani ingin menanam dua jenis jeruk yaitu jeruk garut dan jeruk lemon. Namun petani tersebut hanya ingin menanam jeruk garut tidak lebih dari 10 buah. Setiap lubang tanam akan diberi pupuk kandang. Jeruk garut 60 gram dan jeruk lemon 20 gram. Petani hanya memiliki persediaan pupuk kandang sebanyak 1.140 gram. jika harga jual jeruk garut Rp.15.000, -dan untuk jeruk lemon Rp. 5.000,- maka tentukan banyaknya jeruk garut dan lemon yang harus di tanam supaya mendapatkan keuntungan penjualan terbesar.

BAB VII
LIMIT FUNGSI

Deskripsi Materi
1. Limit Fungsi di Suatu Titik
2. Limit Kiri dan Limit Kanan
3. Limit di Tak Hingga
4. Limit Fungsi Trigonometri

Relevansi

Konsep limit merupakan salah satu konsep dasar untuk memahami konsep-konsep matematika pada area kalkulus seperti turunan dan integral.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari BAB ini, mahasiswa dapat menentukan nilai dari limit suatu fungsi, merepresentasikan suatu konteks ke dalam bentuk limit, dan melakukan komputasi limit dengan bantuan *GeoGebra.*

Materi

A. Limit Fungsi di Suatu Titik

Banyak fenomena kehidupan sehari-hari dapat direpresentasikan dalam suatu konsep limit fungsi. Misalnya dalam konteks pencapaian produksi maksimum suatu mesin di pabrik, dapat dikatakan limit untuk pencapaian hasil pada suatu waktu. Pada kenyataannya, pencapaian tersebut tidak tepat, tapi mendekati sedekat dekatnya.

Secara formal, suatu limit fungsi didefinisikan sebagai berikut:

Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang terbuka l yang memuat a, kecuali mungkin di a. limit $f(x)$ketika x mendekati a sama dengan L ditulis:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Apabila nilai $f(x)$ dapat dibuat sedekat mungkin ke L, dengan cara mengambil nilai x yang cukup dekat dengan a, tetapi $x \neq a$.

Notasi lain untuk untuk limit $f(x)$ ketika x mendekati a sama dengan L adalah

$$f(x) \to L, \text{ bila } x \to a$$

Contoh 7.1

Tentukan nilai limit berikut:

a. $\lim_{x \to 1} 2x$

b. $\lim_{x \to 0} 2x^2 - 3x + 4$

Penyelesaian:

a. $\lim_{x \to 1} 2x = 2(1) = 2$

b. $\lim_{x \to 0} 2x^2 - 3x + 4 = 2(0)^2 - 3(0) + 4 = 4$

Menentukan nilai limit dapat dilakukan dengan bantuan *GeoGebra.* Silahkan buka *GeoGebra* pada bagian CAS. Tuliskan limit dan fungsinya seperti pada Gambar 34 berikut ini.

Gambar 34. Nilai Limit pada Contoh 7.1

Perhitungan $\lim_{x\to 1} 2x$ dan $\lim_{x\to 0} 2x^2 - 3x + 4$ yang telah dilakukan memenuhi sifat-sifat limit fungsi. Simaklah sifat-sifatnya berikut ini.

Sifat-sifat Limit Fungsi

Misalkan c konstanta, n bilangan bulat positif dan kedua limit

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \text{dan} \quad \lim_{x\to a} g(x)$$

ada, maka:

1. $\lim_{x\to a} c = c$
2. $\lim_{x\to a} x = a$
3. $\lim_{x\to a} (cf(x)) = c\lim_{x\to a} f(x)$
4. $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
5. $\lim_{x\to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$
6. $\lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
7. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ jika $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
8. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$
9. $\lim_{x\to a} (f(x))^n = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n$
10. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ jika n genap, $a > 0$
11. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ jika n genap, $\lim_{x\to a} > 0$

Penentuan $\lim_{x \to 1} 2x$ dapat memenuhi sifat yang ke tiga dan kedua yaitu:

$$\lim_{x \to 1} 2x = 2 \lim_{x \to 1} x = 2(1) = 2.$$

Dapatkah Anda menyebutkan sifat mana saja yang terlibat dalam penyelesaian $\lim_{x \to 0} 2x^2 - 3x + 4$?

Selanjutnya, kita akan memaknai konsep limit fungsi dalam suatu konteks. Perhatikan soal berikut ini.

Contoh 7.2

Harga 1 kg pupuk urea bersubsidi saat ini adalah Rp.1.800,-. Kebutuhan urea untuk komoditas padi adalah 250 kg per hektar.

1. Tulislah sebuah fungsi yang menunjukkan biaya kebutuhan pupuk yang bergantung pada luas lahan (hektar).
2. Berapakah biaya pupuk urea yang dibutuhkan ketika luas lahan mendekati 500 bata?

Penyelesaian:

1. Misalnya f adalah biaya kebutuhan pupuk urea per luas lahan dan x adalah luas lahan (hektar). Karena harga 1 kg pupuk urea adalah Rp.1.800,- dan kebutuhan urea pada padi adalah 250 kg per hektar maka kita dapat menuliskan:
$$f(x) = 1800 \cdot 250 \cdot x = 450000x$$
2. Jika diasumsikan bahwa 1 hektar adalah 700 bata maka:
$$500 \text{ bata} = \frac{500}{700} \text{ hektar} \approx 0{,}71 \text{ hektar}.$$
Sehingga, biaya pupuk urea untuk lahan seluas 500 bata

adalah

$$f(x) = 450000(0{,}71) \approx 321428$$

Nilai 321.428 merupakan nilai aproksimasi, dapatkah kalian menjelaskannya?. Dapatkah kita menyatakan bahwa biaya pupuk urea tersebut adalah 321.500? Berikan penjelasannya.

Selanjutnya, coba Anda tentukan nilai dari limit fungsi berikut.

Contoh 7.3

Tentukan nilai dari: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Perhatikan hasilnya, $\frac{0}{0}$ merupakan bentuk tak tentu. Bagaimana supaya limit fungsi tersebut dapat terselesaikan? Kita tentunya mengetahui beragam sifat fungsi sehingga kita dapat mengekspresikan suatu bentuk fungsi ke dalam bentuk lain yang senilai dan tentunya berlaku terhadap sifat-sifat fungsi lainnya.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$.

Contoh-contoh limit fungsi tersebut biasanya disebut sebagai limit fungsi aljabar.

B. Limit Kiri dan Limit Kanan

Misalkan f adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat a, kecuali mungkin pada a sendiri. Maka

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

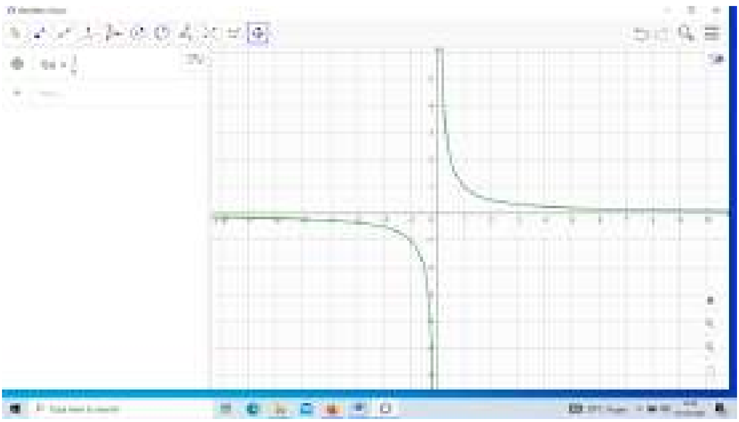
Contoh 7.4

Dengan terlebih dahulu menentukan limit kanan dan limit kiri, tentukan :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$

Penyelesaian:

1. Perhatikan Gambar 35 berikut ini.



Gambar 35. Grafik $\frac{1}{x}$

Pusatkan perhatian kita pada nilai fungsi $\frac{1}{x}$ ketika x menuju 0 dari arah kiri dan arah kanan.

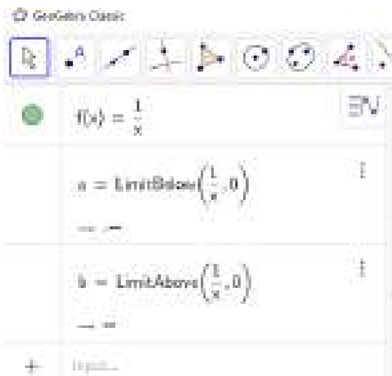
Dari arah kiri kita bisa melihat bahwa x makin menuju 0 nilainya makin kecil menuju tak hingga (diperlihatkan kurva yang terus ke bawah tapi tidak menyentuh sumbu y). Keadaan tersebut dapat ditulis,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Dari arah kanan kita bisa melihat bahwa x makin menuju 0 nilainya makin besar menuju tak hingga (diperlihatkan kurva yang terus ke atas tapi tidak menyentuh sumbu y). Keadaan tersebut dapat ditulis,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

Dengan bantuan *GeoGebra*, kita dapat menentukan nilai limit kiri dan kanan seperti pada Gambar 36 berikut ini.



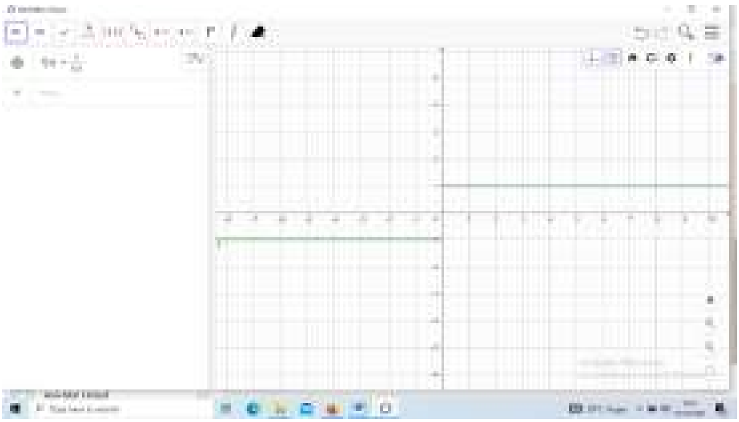
Gambar 36. Menentukan Limit Kiri dan Kanan dengan *GeoGebra*

Karena nilai limit kanan tidak sama dengan limit kiri, maka $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ tidak ada.

Jika kita coba menentukan nilai $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ dengan *GeoGebra*, maka akan muncul seperti pada Gambar 37 berikut ini.

Gambar 37. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ dengan *GeoGebra*

2. Gambar fungsi $\frac{x}{|x|}$ dapat dilihat pada Gambar 38 berikut ini.



Gambar 38. Grafik $\frac{x}{|x|}$

Berdasarkan Gambar 7.5, dari arah kiri, kita bisa melihat bahwa nilai fungsi $\frac{x}{|x|}$ menuju 0 nilainya selalu tetap yaitu -1. Oleh karena itu, kita dapat menulis:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$$

Berdasarkan Gambar 7.4, dari arah kanan, kita bisa melihat bahwa nilai fungsi $\frac{x}{|x|}$ menuju 0 nilainya selalu tetap yaitu 1. Oleh karena itu, kita dapat menulis:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$$

Karena nilai limit kanan tidak sama dengan limit kiri, maka $\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$ tidak ada.

Jika kita coba menentukan nilai $\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$ dengan *GeoGebra*, maka akan muncul seperti pada Gambar 39 berikut ini.

Gambar 39. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$ dengan *GeoGebra*

C. Limit di Tak Hingga

Limit $f(x)$ ketika x mendekati ∞ ditulis:

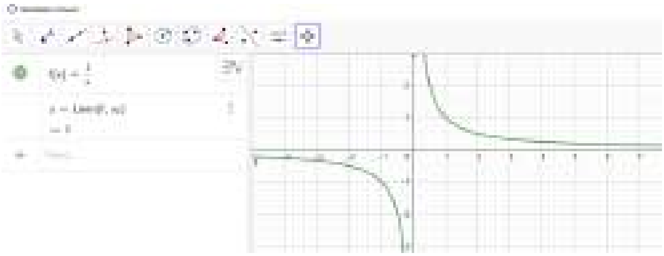
$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

Sebagai contoh misalkan kita akan menentukan nilai:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$$

Maka berdasarkan Gambar 7.2 dapat dinyatakan ketika x

mendekati ∞, dari arah kanan maupun arah kiri nilai $f(x) = \frac{1}{x}$ mendekati nol. Hal ini dapat juga dilihat dari luaran *GeoGebra* pada Gambar 7.7 berikut ini.



Gambar 40. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}$

Contoh lain tentang limit di tak hingga adalah sebagai berikut.

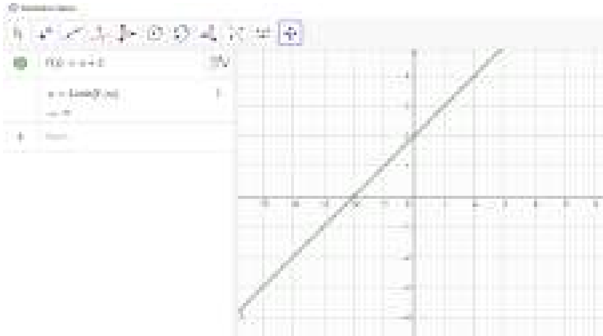
Contoh 7.5

Tentukan:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} x + 2$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-x^2+3x}{2x^2+x}$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3-4x^2+7}{3-6x^2+x^3}$

Penyelesaian

1. Perhatikan *output* dari *GeoGebra* pada Gambar 7.8 berikut ini.



Gambar 41. $\lim_{x \to \infty} x + 2$

2. Perhatikan *output* dari *GeoGebra* pada Gambar 7.9 berikut ini.

Gambar 42. $\lim_{x \to \infty} \frac{-x^2+3x}{2x^2+x}$

3. Perhatikan *output* dari *GeoGebra* pada Gambar 7.10 berikut ini.

Gambar 43. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-4x^2+7}{3-6x^2+x^3}$

D. Limit Fungsi Trigonometri

Bagian ini, kita akan menentukan limit dari fungsi trigonometri. Masih ingat kan fungsi trigonometri? Ya, di tingkat SMP/SMA pasti telah dipelajari beragam fungsi trigonometri, misalnya $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, dan $f(x) = \tan x$.

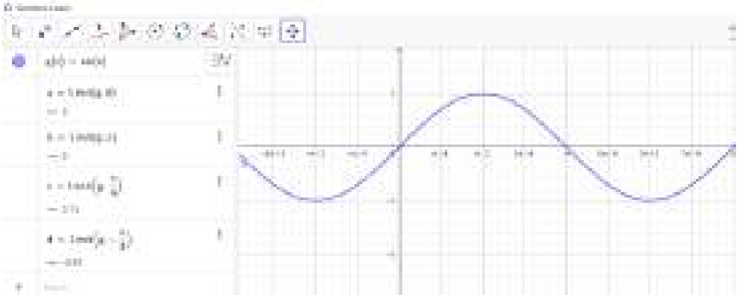
Contoh 7.6

Diberikan $g(x) = \sin x$. Tentukan:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x$
2. $\lim\limits_{x\to \pi} \sin x$
3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \sin x$
4. $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}} \sin x$

Penyelesaian:

Kita dapat melihat grafik $g(x) = \sin x$ dan memasukkan limit yang ditanyakan pada *GeoGebra* seperti pada Gambar 44 berikut ini.



Gambar 44. Penyelesaian Contoh 7.6

RANGKUMAN

Kita sudah mengenal banyak fungsi. Pada pembahasan limit ini, kita menggunakan limit fungsi aljabar dan trigonometri. Limit fungsi yang dipelajari merupakan limit $f(x)$ ketika x mendekati a ditulis:

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Dapat juga merupakan limit $f(x)$ ketika x mendekati ∞ ditulis:

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

Penyelesaian limit fungsi dapat menggunakan *GeoGebra* dengan sintaks:

Limit(<fungsi>,<nilai>)

SOAL LATIHAN

Tentukan nilai dari:

1. $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$
2. $\lim_{x \to 4} (5x^2 - 2x + 3)$
3. $\lim_{x \to 3} (x^3 + 2)(x^2 - 5x)$
4. $\lim_{x \to -1} \frac{x - 2}{x^2 + 4x - 3}$
5. $\lim_{u \to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$
6. $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - x + 12}{x + 3}$
7. $\lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^2 - x - 6}$
8. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$
9. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$
10. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
11. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 2x - 8}$
12. $\lim_{x \to 2} \frac{3 - \sqrt{4x + 1}}{x - 2}$
13. $\lim_{x \to -1} (4x^3 + 5x^2 - 3x - 2)$

14. $\lim_{x\to 0} \frac{2x^3-4x^2+5x+1}{x^2-4}$

15. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3-4x^2+7}{3-6x^2-2x^3}$

16. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

17. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan\ x}{x}$

18. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$

19. $\lim_{x\to 0} \frac{3x+\sin 4x}{5x-\tan\ 2x}$

20. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

21. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{x \sin x}$

22. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\ x}{x}$

Dengan terlebih dahulu menentukan limit kanan dan limit kiri, tentukan :

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{|x-1|}$$

BAB VIII
TURUNAN FUNGSI

Deskripsi Materi

1. Garis Singgung
2. Turunan Fungsi
3. Turunan Fungsi sebagai Laju Perubahan

Relevansi

Konsep turunan fungsi banyak digunakan dalam memecahkan berbagai masalah dalam kehidupan sehari-hari terutama masalah kecepatan atau laju.

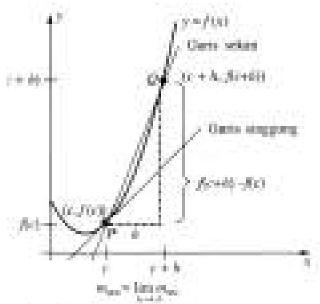
Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari BAB ini, mahasiswa dapat memahami konsep turunan fungsi dan dapat mengimplementasikannya dalam menyelesaikan masalah.

Materi

A. Garis Singgung

Perhatikan ilustrasi berikut:



Gambar 45. Ilustrasi Kurva dan Garis Singgung (Verberg, et al., 2007)

Misalkan P adalah sebuah titik pada suatu kurva dan misalkan Q adalah sebuah titik yang berdekatan dengan P dan dapat dipindah-pindahkan pada kurva tersebut. Lihat garis yang melalui P dan Q, disebut garis sekan (talibusur). Garis singgung (garis tangen) di P adalah posisi pembatas (jika ada) dari garis sekan itu bila Q bergerak ke arah P disepanjang kurva.

Misalkan kurva tersebut adalah grafik dari persamaan $y = f(x)$. Maka P mempunyai koordinat $\left(c, f(h)\right)$, Q mempunyai koordinat $\left(c + h, f(c + h)\right)$, dan talibusur yang melalui P dan Q mempunyai kemiringan m_{sec} yang diberikan oleh

$$m_{\sec} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Definisi 8.1

Garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di titik $P\left(c, f(c)\right)$ adalah garis yang melalui P dengan kemiringan (gradien).

$$f'(x) = m_{\tan} = \lim_{h \to 0} m_{\sec} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asalkan bahwa limit ini ada dan bukan ∞ dan $-\infty$.

Contoh 8.2

Carilah sebuah persamaan garis singgung pada parabola $y = x^2$ di titik P(1,1)

Penyelesaian:

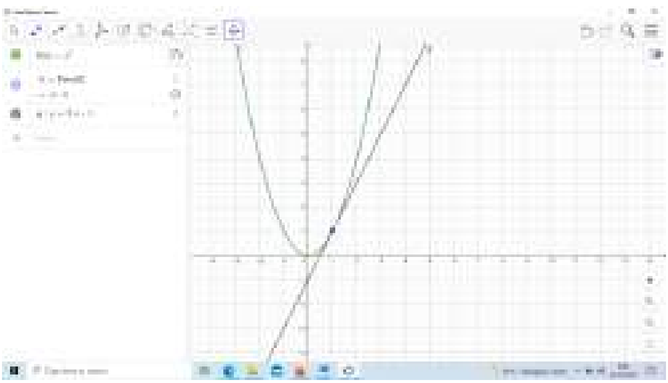
Misalnya $y = f(x) = x^2$, persamaan garis singgung di titik P adalah $\mathrm{y} - \mathrm{y}_1 = \mathrm{m}(\mathrm{x} - \mathrm{x}_1)$. Terlebih dahulu kita cari nilai m.

$$
\begin{aligned}
m = f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2-1^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1^2+2h+h^2-1^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2h+h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 2+h = 2
\end{aligned}
$$

Sehingga persamaan garis singgung pada parabola $y = x^2$ di titik $P(1,1)$ adalah:

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
\Leftrightarrow y - 1 &= 2(x - 1) \\
\Leftrightarrow y - 1 &= 2x - 2 \\
\Leftrightarrow y &= 2x - 2 + 1 \\
\Leftrightarrow y &= 2x - 1
\end{aligned}
$$

Persamaan garis singgung pada parabola $y =$ di titik $P(1,1)$ jika direpresentasikan dalam bentuk grafik dapat dilihat pada Gambar 46 berikut.



Gambar 46. Kurva $y = x^2$ dan Persamaan Garis Singgung di Titik (1,1)

B. Turunan Fungsi

Bentuk $\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ digunakan untuk menghitung berbagai masalah sehingga jenis limit ini diberi nama dan notasi khusus.

Definisi 8.3

Turunan fungsi f pada bilangan c dinyatakan dengan $f'(c)$ adalah

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

Jika limit ini ada.

Notasi Turunan dapat dituliskan dalam beragam bentuk seperti:

$$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=Df(x)=D_x f(x)$$

Contoh 8.4

Carilah turunan fungsi $f(x)=x^2-8x+9$ pada bilangan a.

Penyelesaian:

Misal $f(a)=a^2-8a+9$ dan $f(a+h)=(a+h)^2-8(a+h)+9$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-8(a+h)+9-(a^2-8a+9)}{h}$$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2-8a-8h+9-a^2+8a-9}{h}$$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2-8h}{h}$$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}2a+h-8=2a-8$$

Berdasarkan definisi, dapat diturunkan beberapa sifat turunan fungsi yang selanjutnya dapat digunakan untuk menentukan suatu turunan fungsi. Sifat-sifat turunan fungsi diantaranya adalah:

1. Turunan fungsi konstanta : $\frac{d}{dx}(c) = 0$
2. Aturan pangkat. Jika r sebarang bilangan real, maka $\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-1}$
3. Aturan perkalian konstanta. Jika c konstanta dan f fungsi yang dapat dideferensialkan, maka $\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)]$.

   Jika f dan g keduanya dapat dideferensialkan, maka
4. Aturan jumlah : $\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$
5. Aturan selisih : $\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)]$
6. Aturan hasil kali : $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] + f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]$
7. Aturan Bagi: $\frac{d}{dx}[\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] + f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$

Contoh 8.5

Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut:

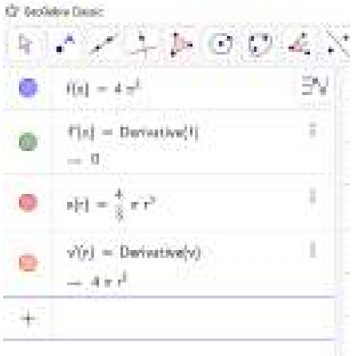
1. $f(x) = 4\pi^2$
2. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

Penyelesaian:

1. Karena $4\pi^2$ merupakan konstanta, maka $f'(x) = 0$.
2. Dengan menggunakan sifat yang kedua, diperoleh:

$$V'(r) = 4\pi r^2$$

Menentukan turunan fungsi dapat diselesaikan dengan mudah menggunakan *GeoGebra.* Misalnya kita akan menyelesaikan soal pada Contoh 47.



Gambar 47. Turunan Fungsi dengan *GeoGebra*

C. Turunan Fungsi sebagai Laju Perubahan

Karena turunan dapat ditafsirkan sebagai laju perubahan, kita mendefinisikan laju perubahan perubahan sesaat $y = f(x)$ terhadap x di $x = x_1$ sebagai laju perubahan rata-rata pada selang yang semakin kecil. Jika selang adalah $[x_1, x_2]$, maka perubahan dalam x adalah $\Delta x = x_2 - x_1$, perubahan padanan dalam y adalah

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

dan laju perubahan sesaat adalah

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Berikut diberikan tafsiran turunan pada masalah biaya produksi.

Contoh 8.6

Misalkan suatu pabrik menghasilkan manisan buah dengan biaya $C = f(x)$ rupiah untuk menghasilkan x kilogram manisan buah.

1. Apa makna $f'(x)$? Apa satuannya?
2. Dalam istilah praktis, apa makna pernyataan $f'(100) = 10000$?

Penyelesaian:

1. $f'(x)$ adalah laju perubahan sesaat dari *C* terhadap *x*. $f'(x)$ bermakna laju perubahan biaya produksi terhadap banyaknya kilogram manisan buah yang dihasilkan.
   Karena
   $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$
   maka satuan untuk $f'(x)$ sama dengan satuan untuk hasil bagi beda $\frac{\Delta C}{\Delta x}$. Karena *C* diukur dalam rupiah dan *x* dalam kilogram, maka satuan untuk $f'(x)$ adalah rupiah

per kilogram.

2. Pernyataan $f'(100) = 10000$ bermakna bahwa setelah 100 kilogram manisan yang dihasilkan, laju pertambahan biaya produksi adalah 10.000 rupiah per kilogram.

RANGKUMAN

Konsep turunan selama ini dikenal muncul dari dua masalah yaitu garis singgung dan kecepatan sesaat. Pada pembahasan BAB ini, konsep turunan fungsi diperkenalkan melalui konsep garis singgung hingga diperoleh definisi turunan. Pada bagian aplikasi, konsep turunan diperkenalkan melalui masalah laju perubahan.

SOAL LATIHAN

Tentukan turunan dari $f(x)=2x+5$.

1. Misalkan $f(x)=x^2$. Carilah $f'(4)$.
2. Sebuah bisnis berhasil baik sedemikian rupa sehingga keuntungan total setelah t tahun adalah $1000000t^2$ rupiah. Tentukan laju keuntungan sesaat pada waktu $t=2$.

BAB IX
INTEGRAL TENTU

Deskripsi Materi

1. Jumlah Riemann
2. Integral Tentu

Relevansi

Konsep integral tentu banyak digunakan untuk menyelesaikan berbagai masalah kehidupan sehari-hari seperti menentukan luas suatu daerah.

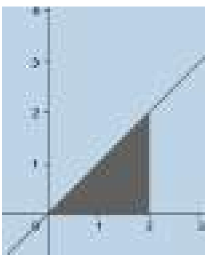
Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari BAB ini, mahasiswa diharapkan dapat memahami konsep integral tentu dan menerapkannya dalam penyelesaian masalah dengan bantuan *GeoGebra*.

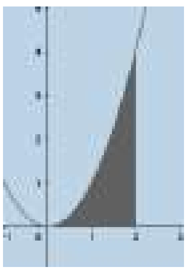
Materi

A. Jumlah Riemann dan Integral Tentu

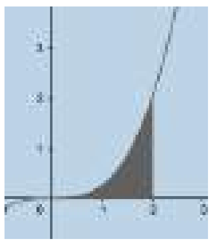
Dapatkah Anda menentukan luas daerah yang diarsir berikut ini?



(a)



(b)



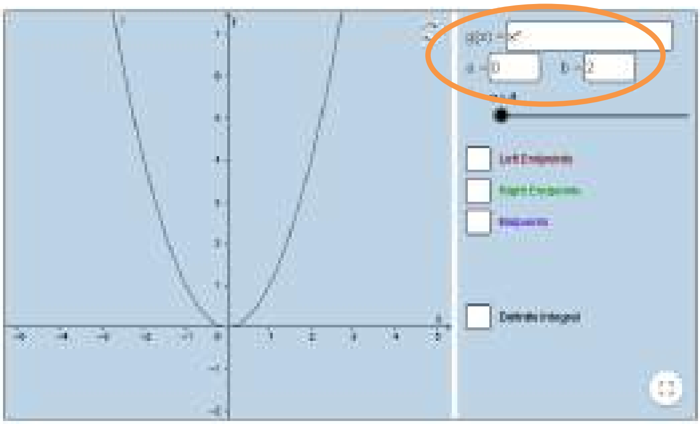
(c)

Gambar 48. Gambar Luas Daerah di Bawah Kurva pada [0,2]

Luas daerah pada Gambar 48(a) dengan mudah dapat dihitung karena berbentuk segitiga dan dapat dihitung dengan rumus segitiga yaitu alas dan atas berukuran 2 satuan, sehingga Luas segitiga tersebut adalah 2 luas satuan. Bagaimana cara menghitung luas Gambar 48(b) dan (c)?

Konsep Jumlah Riemann menawarkan solusinya. Untuk mempermudah pemahaman tentang konsepnya, silahkan Anda masuk ke link: https://www.geogebra.org/m/nmw6Dhdk

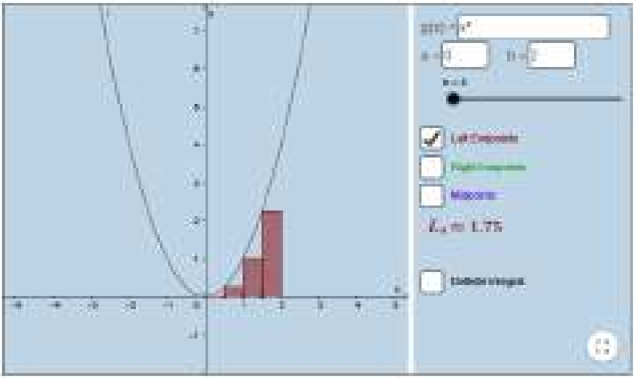
Untuk mendapatkan Gambar 48 bagian (b), Anda dapat menuliskan x^2, 0, dan 2 pada kotak yang ditandai bulatan pada Gambar 49 berikut.



Gambar 49. Kurva $g(x) = x^2,\ x \in R$

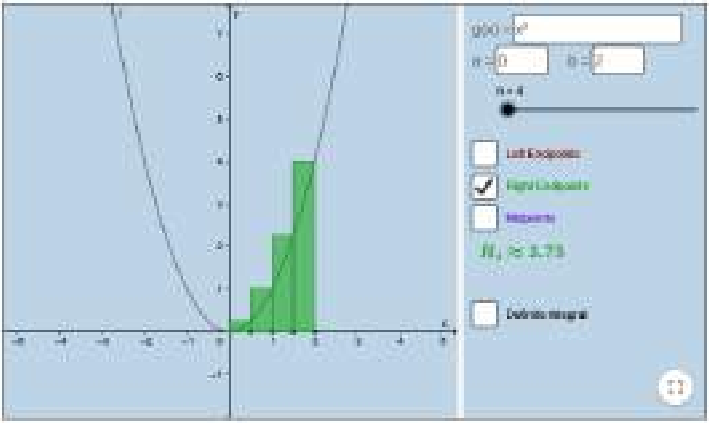
Bagilah interval [0,2] menjadi beberapa sub interval. Misalnya dibuat empat sub interval yaitu [0,0.5], [0.5,1], [1,1.5], dan [1.5,2] sehingga banyaknya sub interval (n) = 4. Setiap sub interval memiliki tiga kemungkinan *endpoint* yaitu di sebelah kiri, kanan, dan tengah. *Endpoint* tersebut akan mempengaruhi segiempat yang membangun luas daerah di bawah kurva yang ditetapkan.

Sekarang kita mulai dari *endpoint* x_i sebelah kiri (*left endpoint*) yaitu batas bawah dari sub interval yaitu 0, 0.5, 1, dan 1,5. Tariklah mulai dari setiap *endpoint* sampai dengan kurva $f(x_i)$ kemudian tarik ke kanan hingga membentuk persegi panjang dengan luas masing-masing $f(x_i)\Delta x_i$ seperti yang ditunjukkan pada Gambar 50 berikut ini.



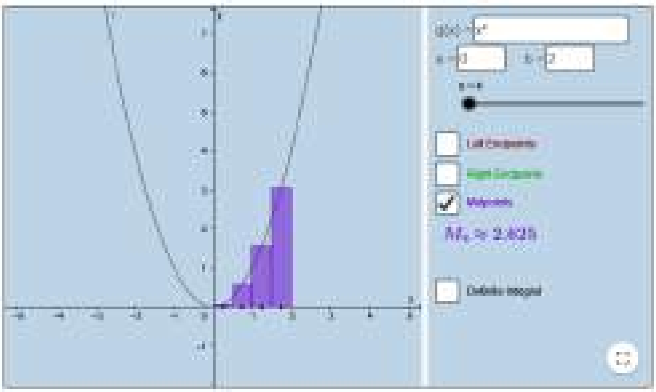
Gambar 50. Jumlah Riemann dengan *Left Endpoint*

Selanjutnya *right endpoint* x_i yaitu batas atas dari sub interval yaitu 0.5, 1, 1.5, dan 2. Tariklah mulai dari setiap *endpoint* sampai dengan kurva $f(x_i)$ kemudian tarik ke kiri hingga membentuk persegi panjang dengan masing-masing luasnya $f(x_i)\Delta x_i$ seperti yang ditunjukkan pada Gambar 51 berikut ini.



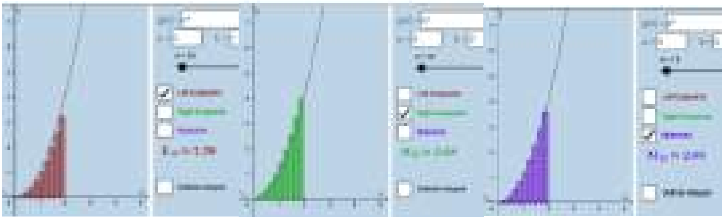
Gambar 51. Jumlah Riemann dengan *Right Endpoint*

Selanjutnya *midpoint* x_i yaitu nilai tengah dari sub interval yaitu 0.25, 0.75, 1.25, dan 1.75. Tariklah mulai dari setiap *endpoint* sampai dengan kurva $f(x_i)$ kemudian tarik ke kiri dan kanan hingga membentuk persegi panjang dengan luas masing-masing $f(x_i)\Delta x_i$ seperti yang ditunjukkan pada Gambar 52 berikut ini.



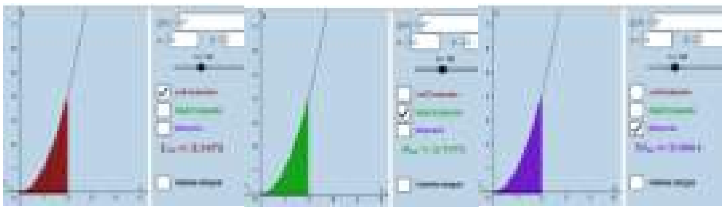
Gambar 52. Jumlah Riemann dengan *Midpoint*

Perhatikan Gambar 9.3, 9.4, dan 9.5. Persegi panjang yang terbentuk belum sepenuhnya pas sesuai dengan luas daerah yang ditentukan. Sekarang kita coba memperkecil sub interval, misalnya dibuat menjadi 10 sub interval sehingga n = 10. Perhatikan ketiga gambar berikut ini.



Gambar 53. Jumlah Riemann $f(x) = x^2$ dengan n = 10

Kita coba memperkecil lagi sub interval 50 sub interval sehingga n = 0. Perhatikan ketiga gambar berikut ini.



Gambar 54. Jumlah Riemann $f(x) = x^2$ dengan n = 50

Dari Gambar 9.3, 9.4, 9.5, 9.6, dan 54 dapat terlihat bahwa makin banyak sub interval yang dibentuk makin bagus dalam artian luas daerah makin mendekati Gambar 9.1 bagian b dan panjang sub interval semakin mendekati 0 ($|P| \to 0$. Jumlah seluruh luas dari persegi yang terbentuk itulah merupakan jumlah Riemann.

B. Integral Tentu

Jumlah Riemann ini menjadi dasar definisi integral tentu. Secara formal ditulis berikut ini.

Misalkan f suatu fungsi yang didefinisikan pada interval tertutup $[a, b]$. Jika

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$$

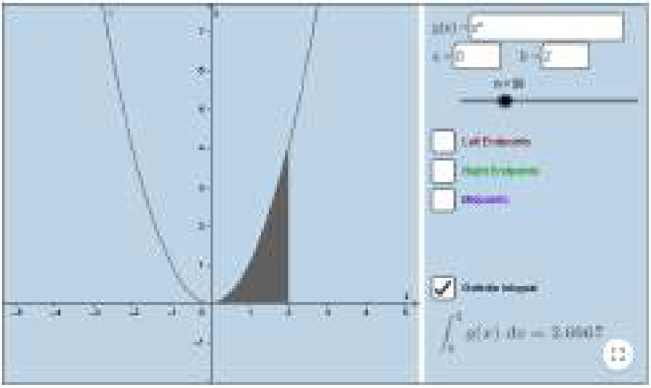
ada, kita katakan f adalah terintegrasikan pada [a,b]. Lebih lanjut $\int_a^b f(x)\,dx$, disebut integral tentu (atau integral Riemann) f dari a ke b, kemudian diberikan oleh

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$$

Berdasarkan definisi tersebut, luas daerah dibawah kurva $g(x) = x^2, x \in R$ pada a = 0 dan b = 2 dapat dinyatakan sebagai:

$$\int_0^2 x^2\,dx$$

Hasilnya dapat dilihat pada Gambar 9.8 berikut ini.



Gambar 55. $\int_0^2 x^2\, dx$

Perhitungan integral tentu secara aljabar mengikuti sifat-sifat integral berikut ini:

1. Jika *r* adalah sebarang bilangan rasional kecuali -1, maka

$$\int_a^b x^r\, dx = \left.\frac{x^{r+1}}{r+1}\right]_a^b$$

2. Didefinisikan $\int_a^b f(x)\, dx, a < b$
   a. $\int_a^a f(x)\, dx = 0$
   b. $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$

3. Jika *f* terintegrasikan pada interval yang memuat titik *a*, *b,* dan *c*, maka

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$$

Tidak peduli apapun urutan *a*, *b,* dan *c*.

Contoh 9.1

Hitunglah $\int_{-1}^{3} 2x^2 - x + 5\,dx$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan sifat 1, maka diperoleh:

$$\int_{-1}^{3} 2x^2 - x + 5\,dx = \frac{2x^{2+1}}{2+1} - \frac{x^{1+1}}{1+1} + \frac{5x^{0+1}}{0+1}\Bigg]_{-1}^{3}$$

$$= \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5x\Bigg]_{-1}^{3}$$

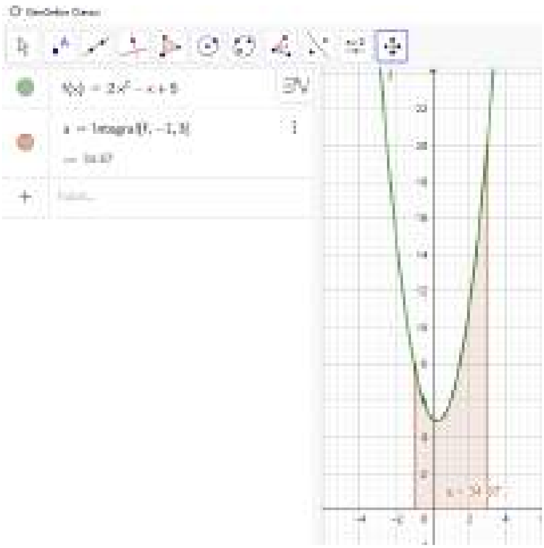
$$= \left(\frac{2(3)^3}{3} - \frac{(3)^2}{2} + 5(3)\right)$$

$$- \left(\frac{2(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + 5(-1)\right)$$

$$= \left(\frac{54}{3} - \frac{9}{2} + 15\right) - \left(\frac{-2}{3} - \frac{1}{2} - 5\right)$$

$$= \frac{56}{3} - \frac{8}{2} + 20 = \frac{104}{3} \approx 34.67$$

Menghitung integral dengan mudah dapat dibantu dengan *GeoGebra*. Perhatikan Gambar 56.



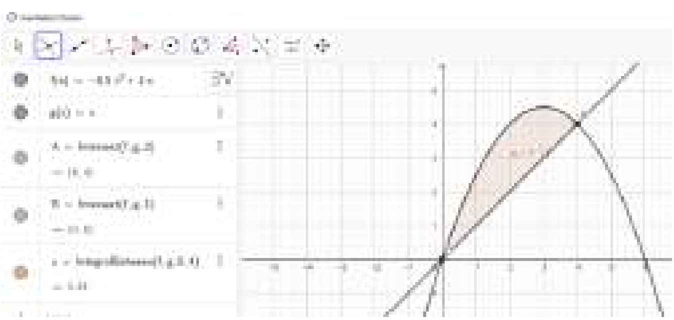
Gambar 56. Integral dengan *GeoGebra*

Contoh 9.2

Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $f(x) = -0.5x^2 + 3x$ dan $g(x) = x$.

Penyelesaian:

Penyelesaian masalah ini dapat dengan mudah menggunakan *GeoGebra* seperti pada Gambar 57 berikut ini.



Gambar 57. Jawaban Contoh 9.2

Gambar 57 sangat jelas menunjukkan tahapan penyelesaian soal yaitu masukkan kedua fungsi, menentukan batas atas dan bawah, dan menghitung luas dengan integral. Batas atas dan batas bawah tidak diketahui di dalam soal, oleh karena itu, Batas bawah dan batas atas ditentukan oleh titik potong kedua kurva dengan memilih tombol *intersect*.

RANGKUMAN

Jumlah Riemann merupakan konsep dasar integral tentu. Penyelesaian integral tentu dapat diselesaikan menggunakan sifat-sifat integral. Penyelesaian integral tentu dapat dengan mudah menggunakan *GeoGebra* dengan sintaks:

Integral(fungsi, batas bawah, batas atas)

Adapun untuk mengetahui suatu daerah diantara dua grafik dapat menggunakan sintaks:

IntegralBetween(fungsi 1, fungsi 2, batas bawah, batas atas)

SOAL LATIHAN

1. Masuk ke link : https://www.geogebra.org/m/nmw6Dhdk
   a. Masukkan $g(x) = -2x^2 + 9$
   b. Pilihlah batas bawah, batas atas, dan banyaknya interval (n).
   c. Berapakah nilai L_n dengan *left endpoint*? (lihat output di sebelah gambar).
   d. Berapakah nilai L_n dengan *right endpoint*? (lihat output di sebelah gambar).
   e. Berapakah nilai L_n dengan *midpoint*? (lihat output di sebelah gambar)
   f. Berapakah nilai integral? (lihat output di sebelah gambar)

2. Hitunglah (dapat menggunakan sifat integral atau *GeoGebra*).
   1. $\int_{-2}^{3} 2x - 7 \ dx$
   2. $\int_{0}^{5} \sqrt[3]{5x} \ dx$
   3. $\int_{-10}^{10} x^3 \ dx$

3. Hitunglah luas daerah yang dibatasi kurva $y = x^2 - 2x$ dan $y = -x^2$.

BAB X
PELUANG

Deskripsi Materi

1. Peluang Suatu Kejadian
2. Sifat-sifat Ukuran Peluang

Relevansi

Dalam penelitian bidang pertanian seringkali diperlukan pengulangan dengan kondisi dan prosedur yang sama dan tertentu. Pengulangan dilakukan untuk memperoleh informasi yang tepat. Setiap pengulangan dari suatu percobaan seringkali tidak dapat ditebak dengan tepat. Kita hanya bisa mengetahui kemungkinan hasil yang muncul dengan menggunakan konsep peluang.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari BAB ini, mahasiswa dapat memahami konsep peluang dan sifat-sifatnya serta menerapkannya dalam menyelesaikan masalah.

Materi

A. Peluang Suatu Kejadian

Misalnya kita akan melakukan percobaan yang dilakukan secara berulang dengan prosedur yang sama untuk mengetahui semua kemungkinan hasil yang diperoleh. Percobaan tersebut disebut sebagai percobaan acak. Gugus dari semua hasil yang mungkin disebut ruang percobaan atau ruang sampel. Setiap anak gugus suatu ruang percobaan disebut kejadian.

Misalnya percobaan pelemparan sekeping mata uang yang memiliki dua sisi yaitu sisi gambar (G) dan sisi angka (A). Jika diasumsikan percobaan pelemparan sekeping mata uang ini dilakukan pada kondisi yang sama, maka pelemparan mata uang ini adalah percobaan acak dengan hasil salah satu sisi gambar atau angka. Dengan demikian, ruang percobaan adalah $S = \{G, A\}$.

Misalnya hasil dari percobaan adalah kejadian B yaitu munculnya sisi gambar. Jika percobaan terus diulang sebanyak n kali, maka jumlah munculnya kejadian B dapat dihitung, misalnya f kali. Proporsi f/n disebut frekuensi relatif kejadian B yang dinyatakan dalam suatu konstanta P yang disebut dengan peluang atau ukuran peluang.

Peluang suatu kejadian B dapat diperoleh dari perbandingan banyaknya kejadian B terhadap banyaknya anggota ruang sampel S,

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)},\ n(S) \neq 0.$$

Kejadian bukan B disebut komplemen B dan dilambangkan dengan B^c.

Contoh 10.1

Pada sebuah lahan terdapat 10 bibit pohon lengkeng dan 14 bibit pohon jeruk. Diambil sebuah pohon secara acak. Berapa peluang terambil bibit:

1. Pohon lengkeng
2. Pohon jeruk

Penyelesaian:

Misal A adalah kejadian terambil bibit pohon lengkeng, B adalah kejadian terambil bibit pohon jeruk, dan S adalah ruang sampel.

Misal $P(A)$ adalah peluang terambil bibit pohon lengkeng dan $P(B)$ adalah peluang terambil bibit pohon jeruk.

Misal $n(A)$ adalah banyaknya bibit pohon lengkeng yang terambil, $n(B)$ adalah banyaknya bibit pohon jeruk yang terambil, dan $n(S)$ adalah banyaknya semua hasil yang mungkin.

1. $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$
2. $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$

B. Sifat-sifat Ukuran Peluang

Berikut ini merupakan rangkuman dari teorema-teorema tentang sifat-sifat ukuran peluang:

1. Untuk setiap $B \subset S$, $P(B) = 1 - P(B^c)$
2. Untuk setiap $B \subset S$, $0 \leq P(B) \leq 1$
3. Jika $A \subset S$ dan $B \subset S$ maka
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
4. Peluang kejadian saling lepas: Misalkan $A, B \subset S$ dan $A \neq B$. Peluang kejadian A atau B adalah
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
5. Peluang kejadian saling bebas: Misalkan $A, B \subset S$. Peluang kejadian A atau B adalah
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
6. Peluang bersyarat: Misalkan $A \subset S$ sedemikian sehingga $P(A_1 > 0)$, misalkan juga $B \subset S$. Maka peluang bersyarat B jika diketahui A, dinotasikan dengan $P(B|A)$ adalah

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Contoh 10.2

Misalnya ruang sampel $S = A \cup B$. Jika $P(A) = 0{,}8$ dan $P(B) = 0{,}5$, tentukanlah $P(A \cap B)$.

Penyelesaian:

Untuk setiap $A, B \subset S$ berlaku

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Berdasarkan persamaan di atas diperoleh

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = (A) + P(B) - P(S)$$
$$= 0{,}8 + 0{,}5 - 1 = 0{,}3$$

Contoh 10.3

Satu kelas mahasiswa Agribisnis mengikuti ujian matematika dan kimia. 10 orang dinyatakan lulus matematika, 15 orang lulus kimia, 5 orang lulus matematika dan kimia. Satu orang dipilih secara acak. Tentukan peluang seseorang tersebut lulus matematika atau kimia.

Penyelesaian:

Misal $P(M)$ adalah peluang mahasiswa lulus ujian matematika dan $P(K)$ adalah peluang mahasiswa lulus ujian kimia. Peluang seseorang lulus matematika atau kimia adalah

$$P(M \cup K) = \frac{10}{25} + \frac{15}{25} - \frac{5}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

Contoh 10.4

Pada sebuah lahan terdapat 10 bibit pohon lengkeng dan 14 bibit pohon jeruk. Diambil dua bibit pohon secara berurutan (tanpa pengembalian bibit pertama yang sudah diambil). Tentukan peluang terambil bibit jeruk di pengambilan pertama dan bibit lengkeng di pengambilan kedua.

Penyelesaian:

Misal $P(A)$ adalah peluang terambil bibit pohon jeruk pada pengambilan pertama,

$$P(B) = \frac{14}{24}$$

$P(B|A)$ adalah peluang terambil bibit pohon lengkeng pada pengambilan kedua,

$$P(B|A) = \frac{10}{23}$$

Kejadian ini diselesaikan dengan konsep sifat peluang bersyarat,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Peluang terambil bibit jeruk di pengambilan pertama dan bibit lengkeng di pengambilan kedua adalah

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{14}{24} \cdot \frac{10}{23} = \frac{35}{138} \approx 0{,}25$$

RANGKUMAN

Semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan disebut dengan ruang sampel. Setiap anak gugus suatu ruang sampel disebut kejadian. Peluang suatu kejadian dapat diperoleh dari perbandingan banyaknya kejadian dengan banyaknya anggota ruang sampel. Ukuran peluang meliputi sifat-sifat ukuran peluang yang terdiri dari sifat komplemen, peluang saling bebas, peluang saling lepas, dan peluang bersyarat.

SOAL LATIHAN

1. Peluang petani sukses panen adalah 0,65. Tentukan peluang petani tidak sukses panen.
2. Seorang petani memiliki koleksi bibit yang terdiri dari bibit pohon mangga dan jambu. Bibit mangga sebanyak 100 pohon dan bibit jambu sebanyak 60 pohon. Petani berencana mengambil bibit tersebut untuk ditanam.
    a. Petani mengambil satu bibit koleksinya secara acak. Tentukan peluang petani tersebut mengambil pohon mangga.
    b. Petani mengambil satu bibit koleksinya secara acak. Tentukan peluang petani tersebut mengambil pohon jambu.
    c. Petani mengambil satu bibit koleksinya secara acak. Tentukan peluang petani tersebut mengambil pohon mangga atau jambu.
    d. Petani ingin menanam dua pohon dan mengambil dua bibit koleksinya berturut-turut secara acak. Tentukan peluang terambil bibit mangga di pengambilan pertama dan bibit jeruk di pengambilan kedua.
    e. Petani ingin menanam dua pohon dan mengambil dua bibit koleksinya berturut-turut secara acak. Tentukan peluang terambil bibit jambu di pengambilan pertama dan bibit mangga di pengambilan kedua.
    f. Petani ingin menanam dua pohon dan mengambil dua bibit koleksinya berturut-turut secara acak. Tentukan peluang terambil keduanya adalah bibit pohon mangga.
    g. Petani ingin menanam dua pohon dan mengambil dua bibit koleksinya berturut-turut secara acak. Tentukan peluang terambil keduanya adalah bibit pohon jambu.

BAB XI
BARISAN DAN DERET BILANGAN

Deskripsi Materi

1. Barisan Bilangan
2. Deret Bilangan

Relevansi

Banyak fenomena dunia nyata membentuk pola suatu barisan dan deret bilangan, tak terkecuali bidang pertanian. Setiap suku barisan atau deret bilangan dibangun dari suatu fungsi yang merepresentasikan suatu fenomena.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari BAB ini, mahasiswa dapat merepresentasikan suatu fenomena ke dalam bentuk barisan dan deret bilangan serta dapat menyelesaikan beragam masalah yang memungkinkan menggunakan konsep barisan dan deret bilangan.

Materi

A. Barisan Bilangan

Barisan merupakan sekumpulan objek yang terurut. Barisan adalah daftar bilangan yang ditulis dalam urutan tertentu. Ada banyak cara untuk menentukan barisan, misalnya dengan menggunakan operator koma, dengan menggunakan kata-kata atau istilah, atau menggunakan rumus eksplisit.

Ekspresi barisan bilangan dibuat dengan menggunakan operator koma dilakukan dengan mendaftarkan anggota-anggota setiap sukunya yang dibatasi dengan tanda koma.

Misalnya barisan bilangan: $1,3,5,7,9,\ldots$ Bilangan 1 adalah suku pertama dari barisan dan dapat ditulis dengan simbol U_1 atau a. Bilangan 3 adalah suku kedua dari barisan dan dapat ditulis dengan simbol U_2. Bilangan 5 adalah suku ketiga dari barisan, dapat ditulis dengan simbol U_3. Seterusnya untuk suku-suku berikutnya. Dengan demikian, barisan yang diekspresikan dengan tanda koma secara umum dapat ditulis:

$$U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots$$

Ekspresi barisan bilangan dibuat dengan istilah dari karakteristik khas barisannya. Misalnya barisan bilangan $2,3,5,7,11,\ldots$ dinyatakan dengan barisan bilangan prima. Barisan bilangan $2,4,6,8,\ldots$ dinyatakan dengan barisan bilangan genap.

Ekspresi barisan bilangan dengan rumus eksplisit dibuat dalam suatu rumus suku ke-n (U_n). Setiap suku dalam barisan adalah nilai dari fungsi tertentu yang diindeks dengan bilangan asli (n).

Berikut ini diberikan contoh representasi barisan dengan menggunakan operator koma, menggunakan kata-kata atau istilah, dan menggunakan rumus eksplisit pada barisan aritmatika dan geometri.

B. Barisan Aritmatika

Barisan aritmatika dibentuk dari bilangan-bilangan di mana bilangan berikutnya merupakan penambahan bilangan sebelumnya dengan suatu bilangan beda (b) tertentu. Kalimat tersebut merupakan kalimat yang merepresentasikan barisan aritmatika yang direpresentasikan dalam bentuk kalimat.

Berdasarkan pengertian barisan aritmatika, kita dapat menyatakannya ke dalam bentuk operator koma. Misalkan bilangan pertama adalah a, maka barisan aritmatika menggunakan operator koma dapat ditulis:

$$a, a + b, a + 2b, a + 3b, \ldots$$

Berdasarkan barisan tersebut, kita dapat merepresentasikan ke dalam rumus eksplisit yaitu menuliskan rumus umum suku ke-n yang dilambangkan dengan U_n,

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Di mana a adalah suku pertama dan b adalah beda.

C. Barisan Geometri

Untuk kasus barisan geometri, kita dapat merepresentasikan barisan geometri dalam bentuk kalimat yaitu: "Barisan geometri adalah barisan bilangan dibentuk dari bilangan-bilangan, di mana bilangan berikutnya merupakan perkalian bilangan sebelumnya dengan suatu bilangan rasio (r) tertentu".

Selanjutnya, untuk menyatakannya dalam operator koma, kita dapat membuat pemisalan bilangan pertama adalah a dan rasio r, maka barisan geometri menggunakan operator koma dapat ditulis:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$$

Berdasarkan barisan tersebut, kita dapat merepresentasikan ke dalam rumus eksplisit yaitu menuliskan rumus umum suku ke-n yang dilambangkan dengan U_n,

$$U_n = ar^{n-1}$$

Contoh 11.1

1. Seorang petani akan melakukan usaha budidaya tanaman cabai. Dia mempersiapkan bedengan pada lahan yang dimilikinya. Untuk memudahkan perawatan tanaman cabai, petani membuat bedengan dengan ukuran lebar 1 meter, panjang 10 meter, dan tinggi 30 centimeter. Setiap bedengan akan dipasang mulsa. Panjang mulsa yang dibutuhkan sangat bergantung pada berapa banyaknya bedengan yang akan dibuat oleh petani tersebut. Tabel 1 berikut menunjukkan kebutuhan mulsa jika petani membuat 1 sampai 5 bedengan.

N	U_n
1	10
2	20
3	30
4	40
5	50

Keterangan:
n: banyaknya bedengan
U_n: panjang mulsa yang dibutuhkan dalam satuan meter

Pertanyaan:

a. Tuliskan kebutuhan mulsa (dalam satuan centimeter) dalam bentuk barisan dengan mendaftarkan/mengurutkan anggota-anggotanya.
b. Barisan yang diperoleh dari jawaban a termasuk pada barisan hingga atau barisan tak hingga?

c. Tuliskan barisan yang diperoleh dari jawaban bagian a ke dalam bentuk rumus eksplisit suku ke-n.

Penyelesaian:

a. Kebutuhan mulsa yang tercantum pada Tabel 1 dinyatakan dalam satuan meter. Kita tahu bahwa 1 meter sama dengan 100 centimeter. Oleh karena itu, kita ubah terlebih dulu satuannya ke dalam satuan centimeter seperti pada Tabel 2 berikut ini.

N	U_n (meter)	U_n (senti meter)
1	10	1000
2	20	2000
3	30	3000
4	40	4000
5	50	5000

Selanjutnya, kita dapat menuliskan kebutuhan mulsa (satuan centimeter) dam bentuk urutan anggota-anggotanya sebagai berikut:

1000, 2000, 3000, 4000, 5000

b. Barisan 1000, 2000, 3000, 4000, 5000 merupakan barisan hingga. Barisan ini terbatas hanya sampai suku kelima saja.

c. Barisan 1000, 2000, 3000, 4000, 5000 dapat dinyatakan dalam bentuk rumus eksplisit suku ke-n yaitu:

$$U_n = 1000n,\ n \epsilon N$$

2. Seorang petani melakukan inovasi sehingga hasil panennya meningkat 1,2 kali setiap tahunnya. Hasil panen tersebut dapat dinyatakan dalam barisan geometri dalam satuan ton:
   100, 120, 144, ...
   Hitunglah hasi panen tahun ke-10.

   Penyelesaian:
   Hasil panen tahun ke 10 merupakan suku ke-10 barisan geometri U_{10}, peningkatan hasil panen merupakan rasio r = 1,2 dan hasil panen pertama adalah a = 100.
   Dengan menggunakan rumus suku ke-n barisan geometri diperoleh:
   $$U_{10} = 100(1{,}2)^{10-1} = 515{,}978$$

D. Deret Bilangan

Jumlah suku dari barisan yang terbatas atau tak terbatas membentuk deret,

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \cdots$$

Ekspresi deret seringkali ditulis dalam beragam bentuk. Misalnya dalam bentuk notasi sigma,

$$\sum U_n$$

atau

$$\sum_{i=1}^{n} U_i$$

Jumlah suku dari barisan yang terbatas atau dapat dikatakan jumlah suku barisan dari suku pertama sampai dengan suku ke-n seringkali ditulis dengan simbol S_n. S_n

seringkali dinyatakan sebagai jumlah *n* suku pertama.

E. Deret Aritmatika

Perhatikan deret aritmatika berikut ini.

$$a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + \ ...$$

Jumlah *n* suku pertama diperoleh dari,

$$S_n = a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + \ ... + (a + (n - 1)b)$$

Secara sederhana, rumus jumlah *n* suku pertama deret aritmatika yaitu:

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

atau

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b)$$

F. Deret Geometri

Perhatikan deret aritmatika berikut ini.

$$a + \ ar + ar^2 + \ ar^3 + \cdots$$

Jumlah *n* suku pertama diperoleh dari,

$$S_n = a + \ ar + ar^2 + \ ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$$

Secara sederhana, rumus jumlah *n* suku pertama deret aritmatika yaitu:

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \quad , \quad r \neq 1$$

atau

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad , \quad r \neq 1$$

Contoh 11.2

1. Biaya produksi tanaman di tahun pertama sebesar 1000$ dan biaya selalu bertambah setiap tahunnya sebesar 5$. Hitunglah banyaknya biaya yang diperlukan selama 5 tahun.

   Penyelesaian:
   Masalah tersebut dapat diselesaikan dengan konsep deret aritmatika.
   Biaya produksi tanaman di tahun pertama adalah a=1000.
   Penambahan biaya setiap tahun adalah sama dan dapat dinyatakan sebagai beda b = 5.
   banyaknya biaya yang diperlukan selama 5 tahun dapat dinyatakan sebagai S_5.
   Dengan demikian,
   $$S_5 = \frac{5}{2}(2(1000) + (5-1)5) = 5050$$

2. Biaya produksi tanaman meningkat 1% dari tahun sebelumnya. Jika biaya produksi pertama adalah 1000$ maka banyaknya biaya produksi selama 15 tahun adalah…

   Penyelesaian:
   Masalah tersebut dapat diselesaikan dengan konsep deret geometri.
   Peningkatan biaya produksi meningkat 1% dari tahun sebelumnya menunjukkan nilai r = 1+1% = 1,01.
   Biaya produksi pertama adalah a = 1000
   Jumlah biaya produksi selama 15 tahun adalah S_{15}.

Dengan demikian,

$$S_{15} = \frac{1000(1{,}01^{15} - 1)}{1{,}01 - 1} = 16096{,}9$$

Jadi, banyaknya biaya produksi selama 15 tahun adalah 16096,9$.

RANGKUMAN

Barisan merupakan sekumpulan objek yang terurut. Cara untuk menentukan barisan dapat menggunakan operator koma, kata-kata/istilah, atau menggunakan rumus eksplisit. Barisan bilangan terurut memiliki pola tertentu pada suku bilangan yang membentuk suatu fungsi dan disebut sebagai rumus suku ke-*n.* Jumlah suku dari barisan dapat membentuk deret. Barisan dan deret yang memiliki pola khas diantaranya adalah barisan aritmatika dan geometri.

SOAL LATIHAN

1. Seorang petani berencana membuat banyak bedengan dalam lahan seluas 1 hektar. Setiap bedengan panjangnya 15 meter. Untuk mengantisipasi gulma, setiap bedengan akan dipasang mulsa. Petani membuat daftar bilangan kebutuhan mulsa per bedengan. Jika petani menuliskan bilangan-bilangan tersebut dalam bentuk barisan 15, 30, 45, 60, … maka:
   a. Tentukan suku pertama barisan tersebut.
   b. Apakah barisan tersebut merupakan barisan aritmatika? Jelaskan
   c. Tuliskan tiga suku berikutnya.
   d. Tentukan rumus suku ke-n (U_n)
   e. Apa makna U_n dalam konteks soal ini?
   f. Berapakah panjang mulsa yang diperlukan jika petani membuat 35 bedengan?
2. Varietas padi baru menguntungkan petani sehingga hasil panennya selalu meningkat 5% setiap tahunnya. Hasil panen perdana sebanyak 500 ton.
   a. Hitunglah hasil panen tahun ke-20.
   b. Hitunglah banyaknya hasil panen selama satu dekade.

BAB XII
PENGANTAR MATEMATIKA KEUANGAN

Deskripsi Materi

1. Teori Suku Bunga
2. Nilai Sekarang
3. Anuitas
4. Amortisasi

Relevansi

Konsep matematika banyak digunakan dalam perhitungan keuangan. Pengantar matematika keuangan ini memberi gambaran dasar tentang suku bunga, nilai sekarang, anuitas, dan amortisasi yang dapat diimplementasikan dalam perhitungan keuangan sehari-hari.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari BAB ini, mahasiswa dapat memahami konsep dasar suku bunga, nilai sekarang, anuitas, dan amortisasi serta dapat mengimplementasikannya untuk menyelesaikan berbagai masalah.

Materi

A. Teori Suku Bunga

Suku bunga atau *interest* dapat merupakan imbalan yang dibayarkan oleh debitur (seseorang atau organisasi) atas penggunaan aset (modal atau *capital*) milik kreditur (orang lain atau organisasi). Dengan kata lain, bunga adalah kompensasi pembayaran dari peminjaman suatu modal kepada yang meminjamkan modal tersebut.

Bunga biasanya dinyatakan dalam bentuk persen per satuan waktu. Satuan waktu atau periode dapat berupa tahun, bulan atau hari.

Modal (*Capital*) dapat juga dikatakan nilai pokok, yaitu sejumlah uang yang diinvestasikan pada saat awal. Sedangkan Nilai akumulasi adalah jumlah total uang yang diterima sesudah periode waktu tertentu. Besar bunga adalah selisih nilai akumulasi sesudah periode waktu tertentu dengan nilai pokok pada saat awal periode.

Modal dan bunga tidak harus diukur dengan satuan yang sama. Tetapi, pada umumnya, modal dan bunga diukur dalam satuan moneter suatu mata uang. Apabila dinyatakan dalam satuan moneter, *capital* juga disebut sebagai prinsipal.

Suku bunga dibedakan atas bunga sederhana (tunggal) dan bunga majemuk. Bunga sederhana hanya mengenakan bunga terhadap *capital* saja, sedangkan bunga majemuk selain mengenakan bunga terhadap *capital* juga mengenakan bunga terhadap bunga yang diperoleh dari periode sebelumnya.

Apabila sejumlah C ditabung dengan bunga sederhana i per tahun, maka setelah n tahun, akumulasi uang dalam tabungan adalah:

$$A_n = C + Cni = C(1 + ni)$$

Apabila sejumlah C ditabung pada rekening yang menerapkan bunga majemuk i per tahun, maka akumulasi tabungan setelah n tahun adalah:

$$A_n = C(1 + i)^n$$

Contoh 12.1
Uang sebesar \$1000,- diinvestasikan selama 3 tahun dengan tingkat bunga 7% pertahun. Berapakah besarnya seluruh uang pada akhir tahun ketiga? Gunakan bunga tunggal dan bunga majemuk. Bandingkan hasilnya dan berikan tanggapan.

Penyelesaian:
Diketahui Capital C = 1000, n = 3, dan i = 0,07.
Akumulasi uang pada akhir tahun ketiga dengan menggunakan bunga tunggal adalah:

$$A_3 = 1000(1+3(0{,}07)) = 1210$$

Akumulasi uang pada akhir tahun ketiga dengan menggunakan bunga majemuk adalah:

$$A_3 = 1000(1+0{,}07)^3 = 1225{,}043$$

Dapatkah Anda memberikan tanggapan tentang hasil kedua perhitungan tersebut?

Perhatikan untuk suatu investasi sebesar 1 satuan moneter untuk periode 1 satuan waktu, yang dimulai pada waktu t, dan misalkan pada waktu $t+1$ menerima kembali sebesar $1+i(t)$. Dalam hal ini faktor $i(t)$ dikatakan tingkat suku bunga untuk periode $[t, t+1]$. Kadang-kadang $i(t)$ disebut juga suku bunga efektif untuk periode bersangkutan.

Jika diasumsikan bahwa tingkat suku bunga yang dikenakan tidak bergantung pada jumlah yang diinvestasikan, maka uang yang diterima pada waktu $t+1$ untuk suatu investasi sebesar C yang dibuat pada waktu t

adalah $C[1+i(t)]$.

Dengan demikian, dapat ditunjukkan bahwa akumulasi dari investasi sebesar C dari waktu 0 sampai waktu n, dengan n bilangan bulat positif adalah

$$A_n = C[1+i(0)][1+i(1)][1+i(2)]\ldots[1+i(n-1)]$$

Jika tingkat suku bunga per periode tidak bergantung pada waktu t untuk investasi yang dibuat pada waktu t, maka ditulis $i(t) = i$ untuk semua t. untuk kasus ini, akumulasi dari investasi sebesar C untuk periode yang panjangnya n satuan waktu adalah:

$$A_n = C(1+i)^n$$

Contoh 12.2

Tingkat suku bunga efektif per tahun untuk jenis tabungan tertentu pada institusi keuangan sebesar 10% sekarang, tetapi setelah 2 tahun suku bunga tersebut akan turun menjadi 8%. Tentukan akumulasi dari investasi sebesar Rp. 20.000.000,- setelah 5 tahun pada tabungan tersebut.

Penyelesaian:

Diketahui C = 20.000.000, n = 5, dan $i(0) = 0{,}1$, $i(1) = 0{,}1$, $i(2) = 0{,}08$, $i(3) = 0{,}08$, $i(4) = 0{,}08$.

Akumulasi investasi pada akhir tahun kelima adalah:

$$A_5 = 20000000(1 + 0{,}1)(1 + 0{,}1)(1 + 0{,}08)(1 + 0{,}08)(1 + 0{,}08)$$

Atau dapat ditulis dalam bentuk pangkat,

$$A_5 = 20000000(1 + 0{,}1)^2(1 + 0{,}08)^3$$

Sehingga diperoleh,

$$A_5 = 30485030.$$

B. Nilai Sekarang

Kita telah mempelajari akumulasi dari suatu investasi dengan berbagai jenis suku bunga. Nilai akumulasi juga biasa disebut nilai yang akan datang (*future value*).

Pada topik ini, nilai C dikatakan sebagai nilai sekarang (*present value*) dan akumulasi merupakan *future value*. Jika *present value* dilambangkan dengan pv dan *future value* dilambangkan dengan C, maka persamaan menjadi,

$$C = pv(1+i)^n$$

atau

$$pv = C(1+i)^{-n}.$$

Untuk n = 1 dan C = 1, nilai sekarang ditulis:

$$v = (1+i)^{-1}$$

Contoh 12.3

Seorang ayah mempunyai anak berumur 8 tahun. Ia berencana ingin mendepositokan uangnya di bank untuk biaya anaknya nanti. Bank memberikan bunga majemuk 12% pertahun. Bila ayah ingin menyerahkan Rp. 10.000.000,- kepada anaknya saat usia 18 tahun, berapa ayah harus mendepositokan uangnya sekarang?

Penyelesaian:

Diketahui C = 10.000.000, n = 10, dan i = 0,12 maka banyaknya uang yang harus didepositokan ayah dihitung menggunakan rumus nilai sekarang yaitu:

$$pv = C(1+i)^{-n} = 10000000\,(1+0{,}12)^{-10} = 3219732$$

C. Anuitas

Anuitas adalah serangkaian pembayaran berkala yang dilakukan selama jangka waktu tertentu. Pembayaran dapat dilakukan bulanan, tahunan dan sebagainya. Besarnya pembayaran berkala tak perlu sama. Pada pembahasan ini, besar pembayaran berkala adalah sama.

Perhatikan rangkaian n kali pembayaran masing-masing sebesar 1 satuan, yang dilakukan pada selang waktu 1 satuan, pembayaran pertama dilakukan pada waktu t+1, pembayaran ke n dibuat pada waktu $t+n$. Nilai dari semua rangkaian pembayaran ini pada suatu periode sebelum pembayaran pertama dilakukan, dinotasikan dengan $a_{\overline{n|}}$. $a_{\overline{n|}}$ dapat disebut sebagai nilai tunai dari suatu rangkaian pembayaran sebesar 1 satuan.

Jika i = 0, maka $a_{\overline{n|}} = n$;

Jika $i \neq 0$ maka

$$a_{\overline{n|}} = v + v^2 + v^3 + \ldots + v^n$$

atau

$$a_{\overline{n|}} = \frac{v\left(1-v^n\right)}{1-v}$$

$$= \frac{1-v^n}{v^{-1}-1}$$

$$= \frac{1-v^n}{i}$$

$$a_{\overline{n|}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Dengan demikian, $a_{\overline{n|}}$ merupakan nilai pada awal periode dari deretan kali pembayaran, masing-masing pembayaran sejumlah *1* satuan, yang dibuat pada setiap akhir periode atau *in-arrear.*

Deretan pembayaran yang dilakukan pada setiap akhir periode disebut juga anuitas pasti (disingkat anuitas) atau *Immediate annuity-certain,* dan $a_{\overline{n|}}$ merupakan nilai sekarang atau *present value* dari anuitas pasti. Kadang-kadang juga digunakan notasi $a_{\overline{n|}i}$ yang menyatakan nilai sekarang anuitas untuk suku bunga *i.*

Nilai dari deretan *n* kali pembayaran pada waktu pembayaran pertama dibuat dinotasikan dengan $\ddot{a}_{\overline{n|}}$.

Jika $i = 0$, maka $\ddot{a}_{\overline{n|}} = n$, untuk $i \neq 0$, maka

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + v + v^2 + v^3 + \ldots + v^{n-1}$$

atau

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{v-1} = \frac{1-v^n}{d}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i(1+i)^{-1}}$$

Dengan demikian $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ adalah nilai pada awal periode dari deretan *n* kali pembayaran, masing-masing sebanyak 1 satuan, yang dibuat pada awal periode atau *in advance.* Deretan pembayaran yang dibuat di awal waktu dikenal juga dengan anuitas awal atau *annuity-due,* dan $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ adalah nilai sekarangnya. Kadang-kadang juga ditulis dengan $\ddot{a}_{n|i}$.

Dari pendefinisian di atas, untuk $n \geq 2$, maka

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = (1+i)a_{\overline{n|}}$$

Secara umum, perhitungan besarnya nilai tunai dan besarnya angsuran/cicilan adalah

$$\text{nilai tunai} = \text{besarnya cicilan} \times \text{anuitas}$$

Contoh 12.4

Pinjaman sejumlah Rp. 24.000.000,- akan dikembalikan dengan 20 kali cicilan tahunan yang jumlahnya sama. Suku Bunga yang dikenakan untuk transaksi ini sebesar 10% per tahun. Tentukan besarnya cicilan tahunan tersebut apabila cicilan dibuat pada akhir tahun dan awal tahun.

Penyelesaian:

Misalkan besar cicilan tahunan tersebut X. Maka cicilan pada setiap akhir tahun adalah:

$$X = \frac{240.000.000}{a_{\overline{20|}}}$$

$$X = \frac{240.000.000}{\frac{1-(1+0{,}10)^{-20}}{0{,}10}}$$

$$X = \frac{240.000.000}{8{,}5136}$$

$$X = 28.190.000$$

Misalkan besar cicilan tahunan tersebut X. Maka cicilan pada setiap akhir tahun adalah:

$$X = \frac{240.000.000}{\ddot{a}_{\overline{20|}}}$$

$$X = \frac{240.000.000}{\frac{1-(1+0{,}10)^{-20}}{0{,}10(1+0{,}10)^{-1}}}$$

$$X = \frac{240.000.000}{9{,}3649}$$

$$X = 25.628.000$$

D. Amortisasi

Metode amortisasi adalah pembayaran hutang yang dilakukan secara berkala dengan jumlah tertentu. Dengan metode amortisasi ini, setiap pembayaran hutang dirinci terdiri dari pembayaran pokok hutang dan pembayaran bunga hutang.

Secara umum, apabila sejumlah H dipinjamkan untuk mendapatkan n kali pembayaran masing-masing $\frac{H}{a_{\overline{n|}}}$. Maka rincian pembayaran adalah skedul seperti dalam tabel dikalikan dengan $\frac{H}{a_{\overline{n}|}}$.

Menghitung jumlah pembayaran

Misalkan jumlah pembayaran adalah X, maka $X = \frac{H}{a_{\overline{n}|}}$, dengan $a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i}$ dan $v^n = \frac{1}{(1+i)^n}$.

Pembayaran bunga = (bunga) × sisa hutang setelah dibayarkan
Pembayaran pokok hutang = jumlah pembayaran– pembayaran bunga

Contoh 12.5

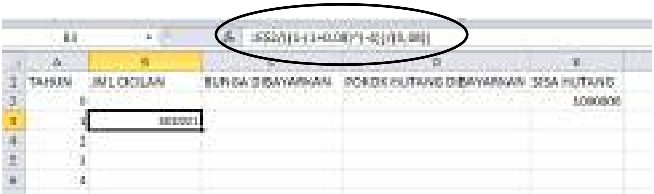
Pinjaman sebesar Rp.1.000.000,- akan dikembalikan dengan cicilan selama 4 tahun dengan suku bunga 8% per tahun. Buatlah skedul amortisasi hutang.

Penyelesaian:
Amortisasi hutang di atas dapat dihitung dengan bantuan *microsoft excel* sebagai berikut:

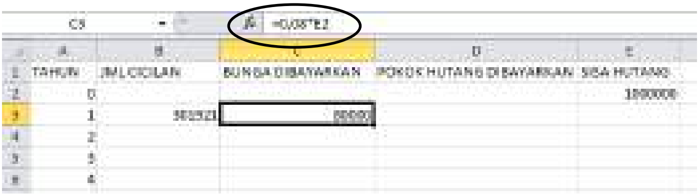
1. Buat tabel sebagai berikut

TAHUN	JML CICILAN	BUNGA DIBAYARKAN	POKOK HUTANG DIBAYARKAN	SISA HUTANG
0				
1				
2				
3				
4				
TOTAL				

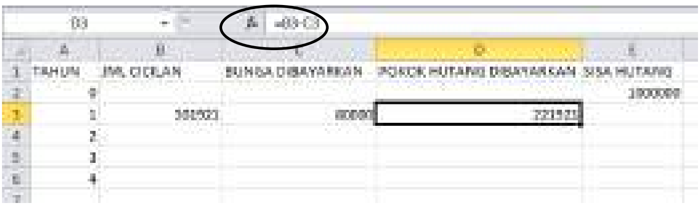
2. Masukkan jumlah hutang pada E2
3. Masukkan formula jumlah cicilan



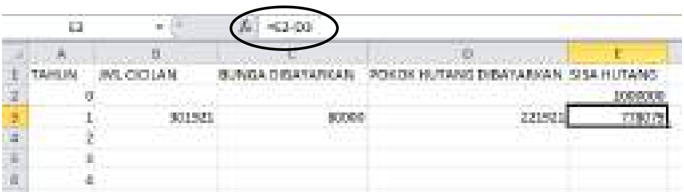
4. Masukkan formula bunga yang dibayarkan



5. Masukkan formula pokok hutang yang dibayarkan



6. Masukkan formula sisa hutang



7. Blok jumlah cicilan, bunga yang dibayarkan, pokok hutang yang dibayarkan dan sisa hutang pada tahun pertama, kemudian *copy* untuk tahun-tahun berikutnya sehingga diperoleh hasil.

	A	B	C	D	E
1	TAHUN	JML CICILAN	BUNGA DIBAYARKAN	POKOK HUTANG DIBAYARKAN	SISA HUTANG
2	0				1000000
3	1	301521	80000	221521	778479
4	2	301521	62246	239474	538405
5	3	301521	43872	258649	279556
6	4	301521	22365	279556	0

RANGKUMAN

Teori tentang suku bunga memperkenalkan berbagai jenis suku bunga yang sering digunakan dalam perhitungan keuangan. Pada BAB ini suku bunga yang dibahas terdiri dari suku bunga tunggal, majemuk, dan efektif. Suku bunga mempengaruhi akumulasi dari suatu investasi. Akumulasi merupakan *future value* yang diperoleh atas suatu investasi. Kebalikan dari *future value* adalah *present value* yaitu suatu konsep keuangan yang sangat bermanfaat dan banyak digunakan misalnya untuk menghitung anuitas dan amortisasi. Anuitas merupakan serangkaian pembayaran berkala yang dilakukan selama jangka waktu tertentu. Jadwal pembayaran yang terdiri dari jumlah cicilan, bunga yang dibayarkan, pokok hutang dibayarkan, dan sisa hutang dihitung melalui konsep amortisasi.

SOAL LATIHAN

1. Tingkat suku bunga majemuk 1% per bulan dikenakan untuk jenis tabungan tertentu pada suatu bank. Tentukan akumulasi dari tabungan sebesar Rp. 10.000.000,- pada waktu tabungan ditutup setelah 30 bulan.
2. Seseorang menabungkan uangnya di bank pada tahun 2010. Pada tahun 2016 uang tersebut menjadi Rp.2.550.000,-. Dengan suku bunga efektif 12% per tahun, tentukan nilai uang tersebut pada tahun 2014.
3. Seseorang membeli kendaraan senilai Rp. 240.000.000,-. Dia membayar uang muka sebesar 20% dan mencicil sisanya. Cicilan tahunan sebanyak 7 kali cicilan dengan jumlah yang sama. Suku Bunga yang dikenakan untuk transaksi ini sebesar 10% per tahun. Tentukan besarnya cicilan tahunan tersebut apabila cicilan dibuat pada akhir tahun dan buatkan juga amortisasi.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. & Rorres, C. (2014). *Elementary Linear Algebra Applications Version (11th ed)*. Canada: Wiley.

Bartle, R.G. & Sherbert, D.R. (2011). *Introduction to Real Analysis (4th ed)*. United States: John Wiley & Sons, Inc.

Giordano, F.R. Fox, W.P. & Horton, S.B. (2014). *A First Course in Mathematical Modeling (5th ed)*. Canada: Brooks/Cole, Cengage Learning.

Purnaba, I.G.P. (2007). *Teori Peluang Buku 1*. Bogor: Institut Pertanian Bogor.

Stewart, J. (2012). *Calculus (7th ed)*. United States: Brooks/Cole, Cengage Learning.

Varberg, D., Purcell, E.J., & Rigdon, S.E. (2006). *Calculus (9th ed)*. United States: Pearson Education, Inc.

Bahan Ajar

MATEMATIKA

Untuk Mahasiswa Program Studi

AGRIBISNIS

IKAPI

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
Pondok Karisma Residence
Jalan Raflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

ISBN 978-623-6478-96-7 (PDF)

9 786236 478967